अर्थमितीय निदर्श
[ECONOMETRIC MODELS]

U. G. C. BOOKS

एच० एस० अग्रवाल

आर बी एस ए पब्लिशर्स
एस० एम० एस० हाईवे, जयपुर-302 003

प्राक्कथन

वर्तमान में विभिन्न आर्थिक समस्याओं के शोध कार्य में गणितीय निदर्शों का खुलकर प्रयोग किया जा रहा है। इन निदर्शों की जानकारी शोधार्थी के लिए आवश्यक है। किन्तु हिन्दी में इस प्रकार की पुस्तक का अभाव है जिसकी सहायता से हिन्दी माध्यम के शोधार्थियों की आवश्यकताओं को पूरा किया जा सके। प्रस्तुत पुस्तक ऐसे सभी शोधार्थियों के लिए लाभप्रद होगी जो आर्थिक नीतियों के निर्माण में गणितीय निदर्शों का प्रयोग करना चाहते हैं।

प्रस्तुत पुस्तक के निर्माण में डा एच एस अग्रवाल द्वारा लिखी गयी पुस्तक Introduction to Econometrics and Mathematical Economics का पूरा सहयोग *लिया गया है। अर्थमितीय निदर्शों के हिन्दी रूपान्तर के साथ अनेक कमियों को दूर करके* पुस्तक में आवश्यक सुधार किये गए हैं। आर्थिक सिद्धान्तों तथा प्रमेयों का सरल ढंग से गणितीय विवेचन किया गया है। जिज्ञासु शोधार्थियों के उच्च अध्ययन हेतु अर्थमिति सम्बन्धी विश्वसनीय ग्रन्थों को यथा स्थान पाद टिप्पणी (Foot notes) में उद्धृत किया गया है। पाठकों की सुविधा के लिए यथासम्भव हिन्दी पारिभाषिक शब्दों के साथ साथ अंग्रेजी के पारिभाषिक शब्द भी दिये गये हैं।

लेखक अपने प्रकाशक श्री सुरेन्द्र जी परनामी (आर बी एस ए पब्लिशर्स) का हृदय से आभार प्रगट करते है जिन्होंने बड़े परिश्रम एवं उत्साह के साथ इस पुस्तक के नवीनतम संस्करण प्रकाशित करने का प्रबन्ध किया है।

पाठकों से विनम्र निवेदन है कि पुस्तक के प्रति अपने रचनात्मक सुझाव देकर अनुगृहित करें।

5 फरवरी 1995

एच. एस. अग्रवाल

विषय-सूची

अध्याय

□□□

1

प्रतिष्ठित आर्थिक विकास निदर्श
(Classical Economic Growth Models)

प्राक्कथन
(Introduction)

"एक निदर्श (Model) आर्थिक प्रक्रमन (Economic programming) हेतु सुव्यवस्थित रूपरेखा प्रदान करता है।" — जी मियर (G Meier)

किसी निदर्श की सरचना करने से पूर्व हमें उन कल्पनाओं (assumptions) अथवा *मान्यताओं को लेना पडता है जिनके द्वारा आर्थिक प्रक्रमन सचालित होता है। इन मान्यताओं* पर आधारित आर्थिक सम्बन्धों को गणितीय सूत्रों के रूप में परिवर्तित करते हैं। जिसके अन्तर्गत अनेक समीकरणों की रचना की जाती है तथा उनको हल किया जाता है। आर्थिक सम्बन्धों का विवेचन इन गणितीय समीकरणों की सहायता द्वारा किया जाता है। आर्थिक सम्बन्धों को ज्यामितीय, बीजगणितीय अथवा सरल गणित द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। यह एक कवि के अपने भाव को कविता के रूप में व्यक्त करने के समान ही है।

देश के विकास के लिए कुछ पूर्व निर्धारित उद्देश्यों की पूर्ति की जाती है। इस प्रकार के उद्देश्य पूर्ण रोजगार (full employment), राष्ट्रीय आय का अधिकतमीकरण, भुगतान का सन्तुलन तथा क्षेत्रीय असन्तुलन का निवारण आदि हो सकते हैं। इन उद्देश्यों की प्राप्ति हेतु आवश्यक है कि आर्थिक विकास के साधनों के मध्य सहसम्बन्ध स्थापित किया जाये। विकास निदर्शों द्वारा इन सहसम्बन्धों के अनुपात तथा साधनों में लाभार्थ परिवर्तन की दिशा आदि का ज्ञान सरलतापूर्वक हो जाता है। इन निदर्शों की सहायता से हम आर्थिक प्रक्रमन की स्थिति का अध्ययन कर सकते है तथा विकास को अवरुद्ध करने वाले तत्त्वों को ज्ञात कर सकते है। अवरोधक तत्त्वों के निवारण द्वारा विकास की दर में वृद्धि की जा सकती है। अत आर्थिक विकास का निदर्श निम्नांकित अवस्था में स्वीकार्य होगा।

(1) परिवर्तन की घटनाओं का विवरण प्रस्तुत करना।

(2) आर्थिक विकास में सहायक अथवा बाधक शर्तों का अध्ययन।

(3) निर्माण के उपरान्त निरन्तर विकास की ओर अग्रसर हेतु पूर्वापेक्षाओं (prerequisites) का यथातथ्य निर्देशक।

इस प्रकार के निदर्श यह व्याख्या करने में भी समर्थ होने चाहिये कि विश्व के कुछ देशों ने अपनी राष्ट्रीय-आय तथा रहन-सहन के स्तर में गतिपर्वूक अत्यधिक वृद्धि किस प्रकार और क्यों की, जबकि अन्य देश प्रथम सीढ़ी पर ही निष्क्रिय अवस्था में ही रह गये।

वर्तमान काल में, अर्थशास्त्रियों द्वारा आर्थिक विकास हेतु प्रयत्न करना आकस्मिक घटना नहीं है। अतीत काल में भी अर्थशास्त्री आर्थिक विकास की समस्याओं के निवारण करने तथा विकास करने हेतु प्रयत्न करते थे। वास्तव में एडम स्मिथ (Adam Smith), डेविड रिकार्डो (David Ricardo), माल्थस (Malthus) तथा अन्य चिरप्रतिष्ठित अर्थशास्त्रियों के अध्ययन का यह केन्द्रीय विषय (Central theme) था। इन अर्थशास्त्रियों के मतानुसार पूँजी-निर्माण आर्थिक विकास का बीज कोष (Core) था, यद्यपि वे निरन्तर पूँजी निर्माण के भविष्य तथा प्रति व्यक्ति आय के उच्चस्तर के विषय में निराशावादी थे। इसका स्पष्ट कारण है उत्पत्ति ह्रास नियम (Law of Diminishing Returns) तथा माल्थस का जनसंख्या सिद्धान्त (Malthusian Principle of Population) का लागू होना। पूँजी तथा पूँजी निर्माण किसी देश के आर्थिक विकास हेतु एक महत्त्वपूर्ण योगदान है और आर्थिक वर्द्धन प्रतिव्यक्ति पूँजी में वृद्धि से सम्बन्धित होता है। परन्तु अधिक नवीन घटनाओं तथा उनके परिणामों द्वारा यह स्पष्ट हो गया है कि आर्थिक विकास के लिये पूँजी आवश्यक है, परन्तु वह आर्थिक विकास की एक पर्याप्त दशा नहीं है। वर्द्धन के लिये केवल पूँजी ही आवश्यक तत्त्व नहीं है, क्योंकि यदि पूँजी प्राप्त कर ली जाती है, परन्तु उसके प्रयोग की उपयुक्त योजना निर्धारित नहीं की जाती है, उस दशा में पूँजी भी व्यर्थ ही नष्ट हो जाती है। आर्थिक विकास के लिए पूँजी निर्माण के साथ-साथ तकनीकी ज्ञान, कुशलता, प्रशिक्षण तथा आर्थिक कुशलता के दृष्टिकोण आदि अन्य तत्त्वों की भी आवश्यकता है। कार्ल मार्क्स का विश्वास था कि पूँजीवाद के अन्तर्गत विकास की प्रक्रिया असमान होती है तथा आर्थिक वर्द्धन की प्रथम पूर्वापेक्षा पूँजीवाद को ही समाप्त कर देना है। नव-चिरप्रतिष्ठित (Neo-classicists) जैसे मार्शल तथा अन्य सतत आर्थिक उन्नति की सम्भावनाओं के विषय में आशावादी थे, यद्यपि उनके मतानुसार यह उन्नति आनुक्रमिक तथा अविच्छिन्न प्रक्रिया थी। प्रो श्युमपीटर (Schumpeter) के मतानुसार आर्थिक वर्द्धन उत्पादकों द्वारा प्रवर्तित तकनीकी अभिनव परिवर्तन की प्रक्रिया है।

संक्षेप में, आर्थिक विकास का निदर्श केवल उन विभिन्न पारस्परिक सम्बन्धों का सारमात्र है, जिनका एक निश्चित प्रत्याशित अर्थव्यवस्था का विकास करने के सन्दर्भ में अस्तित्व होता है। विकास के निदर्श का उद्देश्य उन विधियों तथा उपायों की खोज करना है, जो कि सदैव बढ़ते हुये रूप में वस्तुओं व सेवाओं के एक ऐसे तारतम्य प्रवाह का आश्वासन प्रदान करने में समर्थ हों तथा जिसके मार्ग में ऐसी सामयिक बाधाएँ उत्पन्न न हों, जो कि उक्त प्रवाह को विघटन की दशा की ओर अग्रसर करें।

अब हम आर्थिक विकास के चिरप्रतिष्ठित मौलिक निदर्शों की विवेचना करेंगे।

एडम स्मिथ का विकास निदर्श
(Adam Smith's growth Model)

एडम स्मिथ ने अपने आर्थिक विचारों को अपनी प्रसिद्ध पुस्तक *'An Enquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Crats)* में प्रस्तुत किये है। उनसे पूर्व, भौतिकवादियों (Physiocrats) ने भूमि तथा पूँजी को उत्पादन-साधन माना था, परन्तु एडम स्मिथ ने अनेक उत्पादन-साधनों के मध्य श्रम को अधिक महत्त्वपूर्ण माना है। उन्होंने श्रम-विभाजन पर बल दिया है। इस प्रक्रिया के अन्तर्गत प्रत्येक व्यक्ति अथवा व्यक्तियों का समूह *साथ-साथ कार्य करता है, जिसके फलस्वरूप उत्पादन, श्रम कुशलता, समय की बचत* तथा नवीन आविष्कारों मे वृद्धि होती है।[1]

एडम स्मिथ के मतानुसार श्रम विभाजन की दो निम्नांकित परिसीमाएँ है

(i) **पूँजी की प्राप्य मात्रा (पूर्ति पक्ष)** [The Quantity of Capital Available (supply side)] श्रम विभाजन स्वय उत्पादन की मात्रा पर निर्भर होता है तथा उत्पादन की मात्रा पूँजी की मात्रा पर निर्भर करती है।

(ii) **बाजार-विस्तार (माँग पक्ष)** [Extent of Market (demand side)] एडम स्मिथ का कथन है कि श्रम-विभाजन बाजार के विस्तार द्वारा सीमित होता है। *इनके मतानुसार, "वस्तु का बाजार सकुचित होने की दशा में (अर्थात् वस्तु की* माँग कम होने पर) व्यक्ति एक रोजगार के प्रति आत्मसात् हेतु प्रोत्साहित नहीं होता।

आर्थिक विकास की सचयी प्रक्रिया (Cumulative Process of Economic Development)

एडम स्मिथ के मतानुसार किसी देश का आर्थिक विकास तत्काल विकसित नहीं होता है, *परन्तु यह प्रक्रिया एक समयावधि के अन्तर्गत संचित होती रहती है। वस्तुओं तथा सेवाओं* की माँग में वृद्धि तथा पूँजी के सचय की अवस्था में श्रम विभाजन उत्पन्न होता है तथा इसके परिणामस्वरूप देश के उत्पादन स्तर में भी वृद्धि होती है। परिणामत राष्ट्रीय आय में भी वृद्धि होती है, जिसके फलस्वरूप पुन बचत तथा निवेश मे वृद्धि होगी। यह विशेषज्ञता (specialisation) का नेतृत्व करता है। अर्थव्यवस्था के एक क्षेत्र की प्रगति अन्य क्षेत्रों के विकास को प्रभावित करती है। इसके परिणामस्वरूप वाह्य मितव्ययताएँ (परिवहन, सचार आदि सहित) उत्पन्न होती है।

---

1 When the market is very small no person can have any *encouragement to* dedicate himself entirely to one employment for want of power to exchange all that surplus part of the produce of his own labour which is over and above his own consumption for such parts of the produce of other men s labour a. he has occasion for

अस्तु, एडम स्मिथ ने इस बात को बल दिया है कि विकास में अन्त क्षेत्रीय (Inter-sectoral) सम्बन्ध होता है, जो कि सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था में चहुँमुखी प्रगति का नेतृत्व करता है।

एडम-स्मिथ निदर्श की आलोचना (Cnticism of the Adam Smith s Model)

इस निदर्श की आलोचनाएँ निम्नलिखित हैं

(ı) एडम स्मिथ के निदर्श में उद्यमी का कोई योगदान नहीं है।
(u) एडम स्मिथ के मतानुसार स्वतन्त्र अन्तर्राष्ट्रीय व्यापार महत्त्वपूर्ण है, परन्तु कल्याणकारी राज्य के अन्तर्गत राज्य का हस्तक्षेप आवश्यक है।
(uı) इस निदर्श में उन कारणों की उपेक्षा की गई है, जोकि व्यापारिक चक्रों का नतृत्व करते हैं।
(ıv) यह निदर्श स्थैतिक अर्थव्यवस्था (Statıc Economy) को स्वीकार करता है, अतएव प्रावैगिक अर्थव्यवस्था Dynamıc Economy) के विचार को महत्त्व नहीं दिया गया है।

रिकार्डो का विकास-निदर्श
(Rıcardo's Growth Model)

रिकार्डो का विकास निदर्श एडम स्मिथ के विकास निदर्श का परिमार्जन (refinement) है। परन्तु रिकार्डो भी अपने विचार सुव्यवस्थित रूप से प्रस्तुत करने में असमर्थ रहे। उन्होंने अपने विचार अपनी पुस्तक *The Prıncıples of Polıtıcal Economy and Taxatıon* (1816) में व्यक्त किये हैं। मेयर (Meır) एव बाल्डविन (Baldvın) के मतानुसार "एक प्रकार से रिकार्डो का विकास सिद्धान्त उन सम्बन्धों को ही यथार्थ रूप में प्रतिपादित करने का प्रयास है, जिनको स्मिथ ने व्यक्त किया था, परन्तु वह भी उसकी व्याख्या स्पष्ट रूप में प्रस्तुत नहीं कर सके।"[1]

रिकार्डो के समय में, देश की जनसख्या में वृद्धि हो रही थी, कृषि की उपेक्षा की जा रही थी तथा इग्लैण्ड में औद्योगिक क्रान्ति हो चुकी थी। जिसके परिणाम स्वरूप बचत तथा निवेश को प्रोत्साहन प्राप्त हुआ। यद्यपि इग्लैण्ड में पूर्ण रोजगार की स्थिति थी तथापि जनसख्या वृद्धि के परिणामस्वरूप उपलब्धियाँ मँहगी थीं तथा श्रम दरें जीवन-स्तर तक ही सीमित थीं। इन समस्याओं ने ही स्वय रिकोर्डो को मूल्य तथा वितरण के निदर्श विकसित करने हेतु बाध्य किया।

---

1 In a sense much of Rıcardo's theory of development can be regarded as merely an attempt to formulate ın a rıgorous fashıon relatıonshıp that Smıth showed but faıled to state explıcıtly"

शुद्ध आगम (आर्थिक आधिक्य) की सकल्पना (concept) ही विकास का मूलभूत सिद्धान्त है। "तैयार उत्पाद (finished product) की बाजार-कीमत तथा मजदूरी स्तर पर इसकी लागत का अन्तर समाज का शुद्ध आगम अथवा आर्थिक आधिक्य प्रदान करता है।"

रिकार्डो के मतानुसार- श्रमिक तथा भू-स्वामी अधिक बचत नहीं करते हैं। पूँजीवादी वर्ग में ही बचत तथा निवेश की सामर्थ्य है। निवेश में वृद्धि के फलस्वरूप वाह्य मितव्ययताएँ उत्पन्न हो सकती हैं। अत पूँजी-निर्माण की दर में वृद्धि हेतु रिकार्डो ने अधिकतम लाभ पर बल दिया है, जिसकी प्राप्ति हेतु निम्नांकित कार्य आवश्यक हैं

(1) न्यूनतम मजदूरी (2) कर-छूट (3) स्वतंत्र व्यापार।

यह निदर्श निम्नांकित दो मूलभूत सिद्धान्तों पर आधारित है

(i) जनसख्या सिद्धान्त

(ii) उत्पत्ति ह्रास का नियम

जनसख्या वृद्धि की प्रारम्भिक अवस्था में तो अधिक उपजाऊ भूमि का उपयोग किया जाता है, जिसके फलस्वरूप श्रम की सीमांत उत्पादकता में वृद्धि होती है तथा पूँजी निर्माण की दर में उससे अधिक वृद्धि होती है। परन्तु जनसख्या वृद्धि के साथ, कृषि-उत्पादों की माँग में भी वृद्धि होगी। अत श्रम तथा पूँजी की अधिक इकाइयों का उपयोग कम उपजाऊ भूमि पर किया जायेगा। अत उत्पत्ति ह्रास का नियम लागू हो जायेगा, जिसके परिणामस्वरूप उत्पादन की कीमत में वृद्धि के माध्यम द्वारा लगान की उत्पत्ति होगी। लगान में हुई इस वृद्धि के फलस्वरूप श्रम के मजदूरी शेयर में वृद्धि होगी। चूँकि लाभ कुल आगम तथा मजदूरी शेयर का अन्तर है, अत लाभ के नि शेष भाग में कमी हो जायेगी। इस प्रकार लाभ की दर उस स्तर तक कम हो जायेगी, जबकि जोखिम उठाने के लिये प्रोत्साहन प्राप्त नहीं होगा तथा अतिरिक्त पूँजी निर्माण समाप्त हो जायेगा। इस स्थिति को अर्थव्यवस्था की स्थैतिक अवस्था (Static stage) कहते हैं।

रिकार्डो तथा अन्य प्रतिष्ठत अर्थशास्त्रियों के अनुसार,

$$O = P + W$$

यहाँ O = उत्पादन अथवा राष्ट्रीय आय

P = लाभ

W = मजदूरी

अब यदि हम यह मान लें कि I निवेश को, C_w श्रम द्वारा उपभोग को तथा C_c पूँजी द्वारा उपभोग को प्रदर्शित करते हैं, तब हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं.

$$O = I + C_\cdot$$

अथवा $O = I + C_w + C_c$

चूंकि श्रमिक स्वय द्वारा अर्जित सम्पूर्ण मात्रा का उपभोग कर लेता है, जबकि पूँजीपति उस मात्रा की बचत करता है,

अतएव,

$P = O - C_w$

$= I + C_c + C_w - C_w$

$= I + C_c$ जबकि सम्पूर्ण C की बचत की जाती है

$P = f(I_t, C_c)$

अत स्पष्ट है कि उत्पादन लाभाश पर निर्भर करता है, जोकि पुन निवेश तथा पूँजी के उपभोग पर निर्भर करता है।

रिकार्डो के विकास निदर्श की आलोचना (Criticism of Ricardo's Growth Model]

इस निदर्श की मुख्य आलोचनाएँ निम्नलिखित है

(1) विश्व के पश्चिमी देशों में, अब माल्थस का जनसख्या सिद्धान्त मान्य नहीं है।

(2) वर्तमान विज्ञान द्वारा उत्पत्ति के ह्रास नियम को असत्य सिद्ध कर दिया गया है।

(3) यह पूर्ण रोजगार की स्थिति की कल्पना करता है, जिसको प्राप्त करना तथा विद्यमान रखना सुगम कार्य नहीं है।

(4) यह निदर्श पूर्ण प्रतियोगिता पर आधारित है जो कि वास्तविक जीवन में प्राप्त नहीं है।

माल्थस का विकास निदर्श
(Growth Model of Malthus)

माल्थस ने आर्थिक विकास पर अपने विचार अपनी पुस्तक *Principles of Political Economy (1820)* में व्यक्त किये। उनके मतानुसार आर्थिक विकास हेतु प्रभावित (Effective) माँग आवश्यक है। जनसख्या में वृद्धि के फलस्वरूप प्रभावी माँग में वृद्धि होती है। परन्तु जनसख्या में प्रत्येक वृद्धि के फलस्वरूप प्रभावी माग में वृद्धि नहीं होगी। अर्थात् इसके लिये अर्थव्यवस्था में उत्पादन के अन्य साधनों की उपस्थिति आवश्यक है। अर्थव्यवस्था में श्रम की माँग आर्थिक विकास के लिये सहायक है। उत्पादन के सम्पूर्ण साधनों के पूर्ण प्रयोग की अवस्था में जनसख्या में अधिक वृद्धि द्वारा आर्थिक विकास में वृद्धि नहीं होगी, अपितु इसके द्वारा आर्थिक विकास विपरीत रूप से प्रभावित होगा। इस

प्रकार की स्थिति में, निरन्तर आर्थिक विकास हेतु जनसख्या वृद्धि को नियन्त्रित करना आवश्यक है। माल्थस विकास निदर्श में दो मुख्य निष्कर्ष है

(1) इस निदर्श के अनुसार, औद्योगिक उत्पादन पूर्णतया पूँजी निवेश पर निर्भर होता है,

$$O_i = \alpha\, Q_i$$

यहाँ O_i = औद्योगिक उत्पादन

Q_i औद्योगिक क्षेत्र में पूँजी निवेश

$1/\alpha$ = पूँजी-निर्गत अनुपात

समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{do_i}{dt} = \alpha \frac{dQ_i}{dt} + Q_i \frac{d\alpha}{dt}$$

यदि प्रौद्योगिकी प्रगति स्थिर है, तब पूँजी-निर्गत अनुपात भी स्थिर होगा,

अर्थात् $$\frac{d\alpha}{dt} = 0,$$

अत $$\frac{dO_i}{dt} = \alpha \frac{dQ_i}{dt}$$

अत स्पष्ट है कि औद्योगिक उत्पादन पूँजी-निर्माण पर आश्रित है।

(II) इस निदर्श के अनुसार, कृषि उत्पादन भी भूमि हेतु पूँजी निवेश पर आश्रित है,

$$\therefore O_a = f\,(L_a, K)$$

यहाँ, O_a = कृषि उत्पादन

L_a = कृषि श्रम

K = पूँजी

समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dO_a}{dt} = \frac{df}{dL_a}\,\frac{dL_a}{dt} + \frac{df}{dK}\,\frac{dK}{dt}$$

चूँकि पूर्णतया की स्थिति में K स्थिर है, अर्थात् $\frac{dK}{dt} = 0$

अत. $$\frac{dO_a}{dt} = \frac{df}{dL_a}\,\frac{dL_a}{dt}$$

यहाँ $\frac{df}{\partial L_a}$ = श्रम की सीमान्त उत्पादकता जो कि समय के साथ ह्रासमान है।

तथा $\frac{\partial L_a}{dt}$ = समय के साथ कृषि श्रम शक्ति की वृद्धि की दर।

अत स्पष्ट है कि कृषि उत्पादन श्रम की सीमात उत्पादकता पर आश्रित है, जोकि भूमि हेतु पूँजी निवेश पर आश्रित है। अस्तु, माल्थस ने भूमि सुधार को महत्त्व प्रदान किया है।

मार्क्स का विकास निदर्श
(Growth Model of Marx)

मार्क्स का कथन है कि भावी इतिहास का मुख्य स्वप्न उत्पादन का स्वरूप है। उत्पादन के स्वरूप में दो तथ्य निहित हैं

(i) प्रोद्यौगिकी (Technology), तथा (ii) उत्पादक सम्थान।

महत्त्वपूर्ण ऐतिहासिक परिवर्तन उत्पादन के स्वरूप में परिवर्तन के फलस्वरूप होते हैं। मार्क्स के मतानुसार विनिमय मूल्यों को निर्धारित करने हेतु साधन केवल एकमात्र श्रम ही है। दो वस्तुओं के विनिमय मूल्य का निर्धारण उनकी श्रम लागत के अनुपात द्वारा किया जाता है।

विनिमय-मूल्य "वस्तु की दूसरी वस्तुओं को क्रय करने की शक्ति" को कहते हैं। उदाहरणार्थ, वस्तु A की श्रम लागत 2 इकाई तथा वस्तु B की श्रम लागत 3 इकाई होने पर B के लिये A का विनिमय मूल्य इस प्रकार होगा A वस्तु की 2 इकाइयाँ, B वस्तु की 3 इकाइयाँ क्रय कर सकती हैं। मार्क्स के मतानुसार पूँजी भी पूर्व में सचित श्रम है। किसी वस्तु के उत्पादन हेतु कुल श्रम लागत वर्तमान श्रम तथा पूर्व श्रम का योग होती है। इसी प्रकार भूमि के अशदान की गणना श्रम-घण्टों (Labour hours) के रूप में की जा सकती है। अर्थात् वाह्य रूप से उत्पादन के तीन साधन हैं, परन्तु तीनों को एक ही साधन 'श्रम लागत' के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

अब श्रम के मूल्य के विषय में क्या कहा जाये? मार्क्स का कथन है कि श्रम शक्ति का मूल्य उन आवश्यक वस्तुओं का मूल्य है जिनका उपभोग श्रमिक करता है। वास्तव में, मार्क्स ने मूल्य के जीविका श्रम सिद्धान्त को विकसित किया है। मार्क्स के मतानुसार श्रम की आवश्यक जीविका द्वारा श्रम की लागत का निर्धारण होता है। इस प्रकार मार्क्स का मूल्य सिद्धान्त रिकार्डो के मूल्य सिद्धान्त के समान है। परन्तु पूजीवाद की कार्य प्रणाली तथा उसके भविष्य के विषय में प्राप्त निष्कर्ष विभिन्न हैं।

मार्क्स का मूल्य का श्रम सिद्धान्त यह सिद्ध करने में समर्थ है कि पूँजीवादी अर्थव्यवस्था में विरोधाभासों की अधिकता है तथा ये विरोध स्वय ही नष्ट होंगे। रिकार्डो इसको प्रस्तुत करने में असमर्थ रहे।

मार्क्स सिद्धान्त के प्रथम चरण का अध्ययन करने के लिये मूल्य सिद्धान्त से 'शोषण के विचार' (Idea of exploitation) की व्युत्पत्ति व्यक्त करना है, तदुपरान्त अन्य निष्कर्ष प्राप्त किए जा सकते हैं। मार्क्स सिद्धान्त के अन्तर्गत 'शोषण' का तकनीकी रूप में विशेष अर्थ है। हमें ज्ञात है कि प्रत्येक श्रमिक केवल अपने निर्वाह स्तर पर कार्य करना आवश्यक समझता है। उदाहरणार्थ, सम्पूर्ण वर्ष में 100 दिन कार्य करना पर्याप्त है। परन्तु यदि श्रमिक को वर्ष में 365 दिन कार्य करना पड़े तो इसका अर्थ यह है कि श्रमिक के 265 दिन के श्रम का पूँजीवादियों द्वारा शोषण किया जा रहा है।

अस्तु, वास्तविक श्रम-मूल्य तथा श्रमिक को प्राप्त मूल्य के अन्तर को 'शोषण' कहा जाता है। यह अतिरिक्त अथवा आधिक्य श्रम 'आधिक्य कीमत' (Surplus value) भी कहलाता है।

मार्क्स सिद्धान्त के द्वितीय चरण के अध्ययन हेतु 'पूँजी की प्रकृति' की व्याख्या की जाती है। मार्क्स के मतानुसार पूँजी दो प्रकार की होती हैं (i) चल पूँजी (Variable capital) तथा (ii) अचल पूँजी (Constant capital)। चल पूँजी कुल भुगतान की गई मजदूरी के बराबर है, जबकि कच्चे माल की पूर्ति तथा मशीनों की मरम्मत हेतु आवश्यक पूँजी अचल पूँजी है। इसके अतिरिक्त अचल पूँजी स्वय के मूल्य से अधिक मूल्य प्रदान नहीं कर सकती है अथवा इसके द्वारा आधिक्य मूल्य प्रकट नहीं होता, परन्तु चल पूँजी आधिक्य मूल्य उत्पन्न कर सकती है, क्योंकि यह श्रमिकों को भुगतान की जाती है।

मार्क्स ने पूँजीवाद की कार्य प्रणाली का विश्लेषण करने हेतु तीन महत्त्वपूर्ण अनुपात परिभाषित किये है

(1) श्रमिक शोषण की दर = $\frac{S}{V}$. (i)

यहाँ S = आधिक्य मूल्य

तथा V = चल पूँजी

(2) पूँजी का कार्बनिक मिश्रण = $\frac{C}{V}$ (ii)

यहाँ C = अचल पूँजी

तथा V = चल पूँजी

(3) लाभ-दर $\pi = \frac{S}{V+C}$ (iii)

यहाँ S = आधिक्य मूल्य

$V+C$ = कुल पूँजी

समीकरण (iii) को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$\pi = \frac{S/V}{(V+C)/V} = \frac{S/V}{1+C/V}$$

अर्थात्

$$\text{लाभ की दर} = \frac{\text{शोषण की दर}}{1+\text{पूँजी का कार्बनिक मिश्रण}}$$

प्रमुख निष्कर्ष (Main Conclusions)

(i) यदि (S/V) शोषण की दर समान रहती है तथा (C/V) पूँजी के कार्बनिक मिश्रण में वृद्धि होती है, तब लाभ की दर में कमी होगी।

(ii) यदि (S/V) मे वृद्धि होती है (परन्तु (C/V) पूँजी के कार्बनिक मिश्रण से कम) तब भी लाभ की दर में कमी हो जायेगी।

(iii) यदि (S/V) की वृद्धि (C/V) की वृद्धि से अधिक है, तब यह सम्भव है कि दीर्घकाल में लाभ की दर कम हो तथा उसे ज्ञात किया जा सकता है।

मार्क्स तथा उसके अनुयायियों ने इसको 'उत्तरवर्ती लाभ-दर का नियम' (Law of Following Profit-Rate) कहा है। इस प्रकार कार्ल मार्क्स द्वारा प्रतिपादित लाभ के समाजवादी सिद्धान्त के अनुसार, लाभ प्राप्त होने का मुख्य कारण श्रमिकों का शोषण है, अर्थात् उद्यमी द्वारा श्रमिकों के पुरस्कार का अपहरण है। मार्क्स ने इसे कानूनी लूट (Legalised robbery) की सज्ञा प्रदान की है तथा इस लाभ को समाप्त करने का सुझाव भी प्रस्तुत किया है। इस विषय में मार्क्स का मौलिक तर्क यह है कि अस्थायी माँग के परिणामस्वरूप पूँजी तथा वस्तुओं के उपभोग में असन्तुलन उत्पन्न होगा।

पूँजीगत वस्तुओं की माँग उपभोग की वस्तुओं की माँग पर निर्भर करती है। श्रमिक वर्ग की अधिक वस्तुएँ क्रय करने की सामर्थ्य कम होने के कारण उपभोग की वस्तुओं की माँग में कमी हो जायेगी जिसके परिणामस्वरूप उत्पादकों के 'अतिरिक्त मूल्य' में वृद्धि होगी, परन्तु लाभ-दर कम होगी। अतएव, यह पूँजीवाद के पतन हेतु नेतृत्व करेगा।

2

एक-क्षेत्रीय विकास निदर्श
(One Sector Growth Models)

एक अध्याय मे हम कुछ एक-क्षेत्रीय विकास निदर्शों का अध्ययन करेंगे। ये निदर्श *आर्थिक विकास के सिद्धान्तो की विवेचना करते है। कीन्स का अर्थशास्त्र इन निदर्शों के* प्रतिपादन में अत्यधिक सहायक सिद्ध हुआ है। कीन्स की गुणक तथा त्वरक की सकल्पना को आधुनिक आर्थिक विकास निदर्शों की आधारशिला माना जाता है।

हैरॉड-डोमर के सरल विकास निदर्श
(Simple Harrod-Domar Growth Models)

दो प्रसिद्ध *गणितीय अर्थशास्त्री* हैरॉड *एवं* डोमर ने, *अर्थ व्यवस्था में नियमित एवं स्थायी* विकास हेतु कुछ शर्तों को ज्ञात किया। ये दोनों अर्थशास्त्री *स्थायी* विकास के *गणितीय* निदर्शों की सहायता से शुद्ध राष्ट्रीय आय-वृद्धि की ऐसी दर की खोज करने हेतु प्रयत्नशील थे जो कि एक प्रावैगिक अर्थव्यवस्था को प्रति वर्ष सन्तुलन के मार्ग पर बनाये रखने के लिए आवश्यक हो। प्रो हैरॉड ने अपने निदर्श को अपने लेख *"An Essay on Dynamic Theory"* में प्रस्तुत किया जो 1939 में *Economic Journal* (U K.) में प्रकाशित हुआ। जबकि प्रो डोमर ने 1946 में अपने निदर्श को अपनी पुस्तक *'Essay in the Theory of Economic Growth'* में प्रस्तुत किया। हैरॉड तथा डोमर के समीकरण प्राय समान ही है *और उनके द्वारा समान निष्कर्ष प्राप्त होते है। इनके विश्लेषण की मुख्य बातें निम्नलिखित* है

(1) नियमित विकास के लिए निवेश का दोहरा योगदान है। निवेश द्वारा *आय की* प्राप्ति होती है तथा पूँजी के भण्डार में वृद्धि करके अर्थव्यवस्था की उत्पादन क्षमता में वृद्धि करता है।

(2) *उत्पादन क्षमता मे वृद्धि के फलस्वरूप आय-व्यवहार* के अनुरूप उत्पादन मे वृद्धि होती है अथवा बेरोजगारी में वृद्धि होती है।

(3) दीर्घकाल में पूर्ण रोजगार प्रदान करने हेतु आय के व्यवहार की दशा निर्धारित *की जा सकती है। बेरोजगारी* को दूर करने और दीर्घकालीन असन्तुलन से बचाव हेतु आय

में इतनी पर्याप्त दर से वृद्धि होना आवश्यक है, जिससे कि वर्धमान पूँजी भण्डार की पूर्ण क्षमता का उपयोग हो सके। अर्थात् आय की वृद्धि की दर वृद्धि की पूर्ण क्षमता दर (Full capacity rat^ of growth) होनी चाहिए।

(4) विकास की सन्तुलित दर गुणाक के आकार तथा नवीन निवेश की उत्पादकता पर निर्भर करती है। यह बचत की सीमान्त प्रवृत्ति (propensity to save) के बराबर है।

(5) हैरॉड ने विभिन्न प्रकार की निम्नांकित तीन वृद्धि-दरों का उल्लेख किया है

(i) विकास अथवा वर्द्धन की वास्तविक दर (Actual rate of growth)

(ii) विकास अथवा वर्द्धन की अभीष्ट दर (Warranted rate of growth)

(iii) विकास अथवा वर्द्धन की पूर्ण रोजगार अथवा स्वाभाविक दर (Rate of full employment)

नियमित विकास के अन्तर्गत वास्तविक दर तथा अभीष्ट दर में अन्तर होता है

(a) वास्तविक दर अभीष्ट दर से अधिक होने की दशा में अर्थव्यवस्था अत्यन्त भयानक स्फीति की ओर प्रवृत्त होती है।

(b) वास्तविक दर अभीष्ट दर से कम होने की दशा में अर्थव्यवस्था अत्यन्त भयानक (Cronical) अवस्फीति की ओर प्रवृत्त होती है।

(6) व्यापारिक चक्र (Trade cycle) को नियमित विकास के पथ से विचलित माना गया है।

इस प्रकार यह ज्ञात होता है कि हैरॉड-डोमर निदर्श की महत्त्वपूर्ण विशिष्टता यह है कि इसके अन्तर्गत निवेश प्रक्रिया के दोनों प्रभावों का अध्ययन किया जाता है– प्रथम पूर्तिपक्ष (Supply side) तथा द्वितीय माँग पक्ष (Demand side)। आय प्राप्ति हेतु पूर्ति प्रभाव तथा उत्पादन क्षमता में वृद्धि हेतु माँग प्रभाव माना जा सकता है। पूर्वकालीन प्रतिष्ठित निदर्शों में केवल पूर्ति पक्ष का ही अध्ययन किया गया था। अर्थात् पूँजी निर्माण अथवा बचत पक्ष पर ही अध्ययन किया गया था। इसके विपरीत, कीन्स के निदर्श में पूँजी निर्माण में माँग पक्ष को भी व्यक्त किया गया है। अस्तु, विकास के पूर्वकालीन निदर्श एक-पक्षीय निदर्श थे, जबकि हैरॉड-डोमर निदर्श में पूँजी-संचय के दोनों पक्षों को सम्मिलित किया गया है। हैरॉड-डोमर निदर्श आय के पूर्ण रोजगार के सन्तुलन स्तर की स्थिति से प्रारम्भ होता है तथा इस स्थिति को निरन्तर विद्यमान रखने पर बल देता है। इस स्थिति को विद्यमान रखने हेतु यह आवश्यक है कि जब पूँजी के भण्डार की उत्पादन क्षमता में वृद्धि हो रही हो तब वास्तविक आय के परिमाण तथा उसकी उत्पत्ति में भी उसी दर से वृद्धि हो। अन्यथा,

अतिरिक्त श्रमता उत्पन्न हो जायेगी, जिसके परिणामस्वरूप उद्यमियों को बाध्य होकर अपने निवेश व्यय में कटौती करनी पड़ेगी। निवेश द्वारा केवल व्यय में वृद्धि नहीं होती अपितु इसके द्वारा अर्थव्यवस्था की उत्पादनक्षमता भी उत्पन्न होती है। अतएव, व्यय के परिणाम तथा निवेश द्वारा जनित उत्पादनक्षमता के मध्य सन्तुलन होना आवश्यक है। सरल शब्दों में, हैरॉड-डोमर *निदर्श यह व्यक्त करता है कि पूँजी संचय (निवेश) तथा आय-वृद्धि साथ-साथ ही होनी* चाहिए, ताकि उत्पादन के पूर्ण रोजगार सन्तुलन स्तर को विद्यमान रखा जा सके।

हैरॉड डोमर निदर्श का अध्ययन दो रूपों में किया जा सकता है

(i) स्थैतिक निदर्श (Static Models)

(ii) प्रावैगिक अथवा गत्यात्मक निदर्श (Dynamic Models)

स्थैतिक निदर्श आर्थिक चरों (आय, उपभोग तथा निवेश) एक क्षण अथवा एक *विशिष्ट समय पर अर्थव्यवस्था के अन्तर्गत स्थिति का अध्ययन है, अर्थात् इसमें समय पश्चता* (Time lag) नहीं होती। प्रावैगिक निदर्श अपने चरों की एक समयावधि में सम्बन्धों का *अध्ययन है। अर्थात् इसमें समय विलम्बता (Time lag) होती है। अर्थात् स्थैतिक निदर्श एक समय रहित अध्ययन है तथा प्रावैगिक निदर्श का सम्बन्ध समय, परिवर्तन तथा विकास* से है। यह भी उल्लेखनीय है कि स्थैतिक या प्रावैगिक विश्लेषण आर्थिक क्रियाओं की एक विशेष प्रकार की व्याख्या है

हैरॉड एवं डोमर के स्थैतिक निदर्श
(Static Models of Harrod andDomar)

मान्यतायें (Assumptions)

हैरॉड-डोमर के स्थैतिक निदर्श की मुख्य मान्यताएँ निम्नलिखित है

(1) *आय का पूर्ण रोजगार स्तर विद्यमान है। इसके अन्तर्गत निम्नांकित दो विभिन्न* विकास दर मानी गई है

(i) विकास की पूर्ण क्षमता दर (Full capacity growth rate)

(ii) विकास की पूर्ण रोजगार दर (Full employment growth rate)

प्रथम दर, पूँजी का पूर्ण क्षमता के साथ निरन्तर उपयोग सुनिश्चित करती है तथा द्वितीय दर वर्धित श्रम पूर्ति के पूर्ण रोजगार को सुनिश्चित कर . है: *इस निदर्श की मान्यता है कि श्रम तथा पूँजी दोनों के पूर्ण रोजगार का सन्तुलन प्रारम्भिक रूप से विद्यमान है, तथा वह* विकास दर ही दोनों के वर्धित परिमाण हेतु पूँजी की पूर्णक्षमता का उपयोग तथा श्रम के पूर्ण रोजगार को सुनिश्चित करती है। अर्थात् पूँजी-श्रम अनुपात तथा पूँजी उत्पादन अनुपात स्थिर है।

(2) इसमें सरकार का कोई हस्तक्षेप नहीं है और न ही यह विदेश-व्यापार है। अर्थात बन्द आर्थिक व्यवस्था का अध्ययन किया जाता है।

(3) निवेश की दर उत्पादन तथा आय-वृद्धि की दर पर निर्भर है।

(4) मूल्य स्तर तथा ब्याज की दर अपरिवर्तित रहती है।

(5) विभिन्न क्षेत्रों में पूर्ति तथा माँग एव निवेश तथा उत्पादनक्षमता में स्वत समायाजन में समय नहीं लगता।

(6) बचत की औसत तथा सीमात प्रवृत्तियाँ समान है। अर्थात् सम्भाव्य बचत तथा वास्तविक बचत बराबर हैं तथा बचत की प्रवृत्ति स्थिर है।

(7) पूँजी गुणाक (पूँजी भण्डार तथा उत्पादन का अनुपात, K/Y) स्थिर हैं।

(8) वाछित निवेश (Intended investment) तथा वास्तविक निवेश बराबर है। अर्थात् वास्तविक बचत (S) = वास्तविक निवेश (I)।

इन मान्यताओं में सभी आवश्यक नहीं है, कुछ विश्लेषण को सरल बनाने के लिय मान ली जाती है तथा अधिक जटिल विश्लेषण में इनको शिथिल किया जा सकता है। आय (Y) निवेश (I) तथा बचत (S) सभी शुद्ध रूप (Net sense) में परिभाषित की गई है। अन्त में, यह माना जाता है कि दीर्घकाल में यह रेखीय है तथा मूल बिन्दु स विचरण करता है।

डामर का निदर्श (Domar's Model)

डोमर ने निम्नलिखित प्रश्नों का समाधान खोजन हेतु इस निदर्श की रचना की थी

चूँकि निवश द्वारा उत्पादक क्षमता में वृद्धि होती है तथा आय प्राप्त होती है, आय और उत्पादक क्षमता में समान वृद्धि हेतु तथा पूर्ण रोजगार की स्थिति को बनाये रखने हेतु निवेश की वृद्धि दर क्या होनी चाहिए ? इस निदर्श में उत्पादन क्षमता को पूर्ति पक्ष के रूप में तथा आय प्राप्त करने की क्षमता को माँग पक्ष के रूप में प्रदर्शित किया गया है। डामर ने इस समस्या का समाधान निम्न प्रकार किया है

हम मान लें I = अर्थव्यवस्था के अन्तर्गत निवेश की वार्षिक दर

S = नई उत्पादित आय की प्रति डॉलर (Dollar) वार्षिक उत्पादन क्षमता

अर्थात् S = वास्तविक आय की वार्षिक मात्रा में वृद्धि जा कि नवीन उत्पादित पूँजी भण्डार (K) के एक डॉलर स उत्पन्न की जा सके।

अथवा $$S - \frac{\Delta Y}{\Delta K} = 1 / \frac{\Delta K}{\Delta Y}$$

यहाँ ΔY = वास्तविक आय में वृद्धि

ΔK = पूँजी में वृद्धि

तथा $\frac{\Delta K}{\Delta Y}$ = सीमांत पूँजी गुणाक

अथवा निवेश पूँजी निर्गत अनुपात

अथवा त्वरक गुणाक

अस्तु S त्वरक गुणाक अथवा सीमात पूँजी गुणाक का व्युत्क्रम है। उदाहरणार्थ, यदि एक डॉलर अतिरिक्त प्राप्त करने के लिए 2 डॉलर अतिरिक्त पूँजी की आवश्यकता है, तो S का मान $1/2$ अथवा 50% प्रति वर्ष होगा। इस प्रकार एक डॉलर निवेश करने पर उत्पादन क्षमता में कुल वृद्धि S के I गुणा *(I times S)* डॉलर प्रतिवर्ष होगी।

यहाँ यह स्मरणीय है कि नई निवेशित पूँजी का पूर्ण भाग उत्पादन क्षमता में वृद्धि हेतु प्रयुक्त नहीं होता है। इसका एक भाग वर्तमान पूँजी अथवा पूर्व में निर्मित सयत्र के प्रतिस्थापन में व्यय किया जा सकता है। यदि ऐसा होता है, (अर्थात्, मूल्य ह्रास को नवीन निवेश की मात्रा में से घटा देना चाहिये तथा मान्यतानुसार हमें शुद्ध निवेश पर विचार करना चाहिये) तब निवेश में वृद्धि के परिणामस्वरूप उत्पादन क्षमता की वृद्धि S के I गुणा के बराबर नहीं होगी, परन्तु कुछ कम मात्रा में होगी जिसे हम σ के I गुणा से प्रदर्शित कर सकते हैं। S तथा σ का अन्तर, पूँजी निवेश के प्रति डॉलर के फलस्वरूप केवल नवीन सयत्रों में उत्पादन क्षमता में वृद्धि तथा सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था की उत्पादन क्षमता है। तद्नुसार,

$$\sigma < S$$

अब, σ का I गुणा उत्पादन में कुल शुद्ध वृद्धि है, जिसको निवेश की प्रत्येक इकाई के लिये अर्थव्यवस्था उत्पादित कर सकती है। यह $(I\sigma)$ अर्थव्यवस्था के कुल पूर्ति पक्ष को प्रदर्शित करता है। अर्थव्यवस्था का कुल माँग पक्ष प्रसिद्ध कीन्स का गुणक है। अतिरिक्त उत्पादन की माँग अतिरिक्त निवेश द्वारा ही उत्पन्न होती है, क्योंकि निवेश द्वारा ही नवीन आय प्राप्त होती है। अस्तु, व्यवस्था का माँग पक्ष भी I पर निर्भर करता है। निवेश (I) गुणक के माध्यम द्वारा आय प्राप्त होती है।

मान लो निवेश की निरपेक्ष वार्षिक वृद्धि दर ΔI है, आय की निरपेक्ष वृद्धि ΔY *से प्रदर्शित की जाती है तथा* α *बचत प्रवृति को प्रदर्शित करता है। तब आय में वृद्धि निवेश* की वृद्धि के गुणक $(1/\alpha)$ गुणा होगी। अर्थात्

आय में वृद्धि = गुणक × निवेश में वृद्धि

अथवा $$\Delta Y = \frac{1}{\alpha} (\Delta I) \qquad (2\ 1)$$

यह निवेश का माँग पक्ष अथवा माँग प्रभाव है।

यदि (मान्यतानुसार) अर्थव्यवस्था प्रारम्भिक रूप में पूर्ण रोजगार की स्थिति में है तब राष्ट्रीय आय उत्पादन क्षमता के बराबर होनी चाहिये। अर्थात् राष्ट्रीय आय तथा उत्पादन क्षमता की वृद्धि दर समान होनी चाहिये ताकि पूर्ण रोजगार की स्थिति विद्यमान रहे। अत निदर्श का आधारभूत समीकरण निम्न प्रकार हो जाता है

$$\Delta\ Y = I\sigma \qquad (2\ 2)$$

अथवा $\frac{1}{\alpha}\Delta I \quad = \quad I\sigma$

↓	↓
निवेश का माँग पक्ष अथवा आय मे वार्षिक वृद्धि	निवेश का पूर्ति पक्ष अथवा उत्पादन क्षमता में वार्षिक वृद्धि

समीकरण (2 2) को पुन लिखने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{\Delta I}{I} = \alpha\sigma \qquad (2\ 3)$$

यह आधारभूत समीकरण है।

यहां, $\frac{\Delta I}{I} = \frac{\text{निवेश म वार्षिक निरपेक्ष वृद्धि}}{\text{निवेश की मात्रा}}$

= निवेश के विकास की वार्षिक प्रतिशत दर

पुन समीकरण (2 1) द्वारा हमे प्राप्त होता है

$$\Delta\ Y = \frac{1}{\alpha}\ (\Delta I) \qquad (\text{i})$$

समाकलन करने से (By integration),

$$Y = \frac{1}{\alpha}\ I \qquad (\text{ii})$$

(i) का (ii) से भाग देने पर,

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{(1/\alpha)\Delta I}{(1/\alpha)I}$$

अथवा $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta I}{I}$ (2 4)

अतएव समीकरण (2 4) तथा (2 3) से निम्नलिखित परिणाम प्राप्त करते है

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta I}{I} = \alpha\sigma \qquad (2\ 5)$$

समीकरण (2 5) द्वारा स्पष्ट है कि पूर्ण रोजगार की स्थिति बनाये रखने के लिये यह आवश्यक है कि निवेश तथा आय की वार्षिक प्रतिशत वृद्धि दर $\alpha\sigma$ *के बराबर होनी चाहिये।* अस्तु पूर्ण रोजगार का स्तर बनाये रखने हेतु विकास दर निवेश (I) तथा वास्तविक आय (y) की वार्षिक प्रतिशत वृद्धि दर (अथवा चक्रवृद्धि ब्याज की दर) स्थिर होनी चाहिये तथा यह बचत की प्रवृत्ति तथा निवेश की औसत उत्पादकता (पूँजी गुणाक का व्युत्क्रम अथवा त्वरक) के गुणनफलन के बराबर होनी चाहिये।[1]

सख्यात्मक उदाहरण

मान लो σ = उत्पादन क्षमता = 25% प्रति वर्ष
α = बचत प्रवृत्ति = 12% प्रति वर्ष
Y = प्रारम्भिक राष्ट्रीय आय = 150 करोड रूपये प्रतिवर्ष

पूर्ण रोजगार को बनाये रखने हेतु

निवेश $150 \times \frac{12}{100}$ अथवा 18 करोड के बराबर होना चाहिये।

परन्तु इस निवेश द्वारा उत्पादन क्षमता में वृद्धि होगी। अत

उत्पादन क्षमता में वृद्धि $= I\sigma = \frac{150 \times 12}{100} \times \frac{25}{100} = 4\ 5$ करोड रुपये

यदि पूर्ण उत्पादन क्षमता का उपयोग होता है, तब राष्ट्रीय आय में 4 5 करोड रूपये की वृद्धि होगी।

अत , आय में सापेक्ष वृद्धि = $\frac{\text{निरपेक्ष वृद्धि (आय में)}}{\text{आय}}$

---

1 The answer to the problem of what rate of growth is necessary to maintain a continuous state of full employment is that investment (I) and real income (y) *must grow at a constant annual percentage rate (or compound interest rate)* equal to the product of the propensity to save and the average productivity of investment (the inverse of the capital coefficient or accelerator)
Domar, Evsey D, *Esseays in the Theory of Economic Growth* New York (1957)

$$= \frac{150 \times \frac{12}{100} \times \frac{25}{100}}{150} = \frac{12}{100} \times \frac{25}{100} = \alpha\sigma = 3\%$$

इस प्रकार आय में प्रतिवर्ष 3% की वृद्धि होनी चाहिये ताकि पूर्ण रोजगार की स्थिति बनी रहे जिससे कि पूँजीगत वस्तुओं की अधिकता नहीं हो। (ज्ञात है, प्रारम्भिक राष्ट्रीय आय, α तथा σ)

अर्थव्यवस्था के स्थायी विकास के लिये इस शर्त की पूर्ति होना एक आवश्यक पूर्वापेक्षा है। विकास की दरों (आय में वृद्धि की दर तथा उत्पादन क्षमता की वृद्धि दर) में कोई विचलन होता है, तब पूँजीवादी अर्थव्यवस्था में अस्थिरता अथवा असन्तुलन उत्पन्न हो जायेगा। अनेक प्रकार के व्यापारिक चक्र उत्पन्न होंगे। उदाहरणार्थ, यदि आय में वृद्धि उत्पादनक्षमता की वृद्धि से अधिक है तब, उत्पादनों की सापेक्ष कमी हो जायेगी, जिसके परिणामस्वरूप अर्थ व्यवस्था में स्फीति की स्थिति उत्पन्न हो जायेगी। इसके विपरीत यदि, आय में वृद्धि उत्पादन क्षमता की वृद्धि से कम है तब उत्पादन का आधिक्य होगा जिसके परिणामस्वरूप अवस्फीति की स्थिति उत्पन्न हो जायेगी।

समीकरण (2 3) द्वारा स्पष्ट है कि α जितना अधिक होगा, उतनी ही अधिक निवेश की मात्रा होगी, यदि आय का स्तर पूर्ववत् रखना हो। उसी प्रकार, α जितना अधिक होगा उतनी ही अधिक वृद्धि उत्पादन-क्षमता में होगी और इसलिए आय में अधिक वृद्धि होनी चाहिये जिससे निष्क्रिय क्षमता (Idle capacity) से बचा जा सके। चूँकि आय की वृद्धि निवेश की वृद्धि पर निर्भर होती है, अतएव आय में वृद्धि हेतु निवेश में भी वृद्धि करना आवश्यक है। निवेश में कितनी और वृद्धि की जावे यह $\alpha\sigma$ द्वारा ज्ञात की जा सकती है। इस प्रकार अर्थव्यवस्था को द्विविधा (Delemma) का सामना करना पड़ता है। यदि आज पर्याप्त निवेश उपलब्ध नहीं होता तो आज बेरोजगारी उत्पन्न हो जायेगी, परन्तु यदि आज माँग में वृद्धि करने हेतु पर्याप्त निवेश किया जाता है तो कल और अधिक निवेश की आवश्यकता होगी, ताकि वर्धित क्षमता का उपयोग किया जा सके तथा कल होने वाले पूँजी के अधिक सचय से बचा जाय। वरन् अत्यधिक पूँजी के जमाव के फलस्वरूप निवेश में कमी और इसलिये परसों (Day after tomorrow) मन्दी हो जायेगी। अत यह कहा जा सकता है कि अर्थव्यवस्था को उसी स्थिति में बनाये रखने हेतु उसकी चलन गति का तीव्र होना आवश्यक है, अन्यथा यह नीचे की ओर गतिशील हो जायेगी। उस स्थिति के विपरीत मन्दी की अवस्था में निवेश आवश्यक दर से कम होगा तब वर्तमान स्थिति को बनाये रखने हेतु तीव्र विकास की दर से विद्यमान क्षमता पर दबाव में वृद्धि होती है तथा निवेश को प्रोत्साहन मिलता है जिसके द्वारा उत्पादन की दर में वृद्धि होती है तथा क्षमता पर और अधिक दबाव पड़ता है। अस्तु, बेकार पूँजी को निष्कासित करने हेतु और अधिक पूँजी निर्माण करना आवश्यक है (बचत की प्रवृत्ति α दी हुई हो अथवा यह मान लिया जाय कि α द्रुतगति

से नहीं घट रहा है)। पूँजी के अभाव से बचने हेतु निवेश को कम करना चाहिये। अर्थात्, उत्पादन अथवा निवेश में वृद्धि के फलस्वरूप विक्रय की जानी वाली मात्रा में वृद्धि होगी परन्तु इसके (निवेश) फलस्वरूप माग मे और अधिक वृद्धि होगी जिससे न्यून उत्पादन (Under production) होगा तथा पूँजी का अभाव हो जायेगा। पूँजी के इस अभाव को दूर करने हेतु निवेश में कमी की जानी चाहिये ताकि माँग में कमी हो तथा क्षमता पर दबाव कम हो जाये।

प्रतिष्ठित निदर्शों के विपरीत जोकि स्थिरता की ओर प्रवृत्त होते है अथवा मार्क्स के निदर्श के विपरीत जो कि पूँजीवाद को अपरिहार्य अध पतन की ओर ले जाता है डोमर का निदर्श प्रदर्शित करता है कि निरन्तर विकास की ओर अग्रसर हो रही पूँजी व्यवस्था की कल्पना करने मे कोई अन्तर्निहित तार्किक असम्भावना नहीं है।

हैरॉड का निदर्श (Harrod s Model)

डोमर के समान हैरॉड भी विकास की नियमित दर का अध्ययन करता है तथा उन सम्भव पथों को निर्दिष्ट करता है जिनके द्वारा आर्थिक व्यवस्था विकसित हो सकती है। हैरॉड के कथनानुसार, बचत निवेश के बराबर है ($S = I$)। उनके निदर्श में, अर्थव्यवस्था में वृद्धि की दर निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त की गई है

$$GC = s \qquad (2\ 6)$$

यहाँ G = आय अथवा उत्पादन = $\frac{\Delta Y}{Y}$ की वृद्धि दर

C = विचाराधीन समयावधि में पूँजी में वृद्धि तथा उत्पादन में वृद्धि का अनुपात = $\frac{I}{\Delta Y}$

s = बचत की औसत प्रवृत्ति = $\frac{S}{Y}$

समीकरण (2 6) को पुन लिखने पर,

$$\frac{\Delta Y}{Y} \ \frac{I}{\Delta Y} = \frac{S}{Y}$$

अथवा $$I = S \qquad (2\ 6a)$$

समीकरण (6a) व्यक्त करता है कि प्राप्त की हुई अथवा वास्तविक बचत (Ex-post savings) प्राप्त निवेश (Ex-post investment) के बराबर है। इस समीकरण से निम्नांकित दो व्यावहारिक सम्बन्धों का ज्ञान होता है

(i) बचत आय-स्तर पर निर्भर करती है।
(ii) निवेश आय की वृद्धि-दर पर निर्भर करता है।

द्वितीय सम्बन्ध में त्वरण सिद्धान्त (Acceleration principle) निहित है, अर्थात निवेश आय की वृद्धि दर का समानुपाती है। अत स्पष्ट है कि उत्पादन की दर में जो वृद्धि हो रही है उसमें पूँजी के भण्डार की वृद्धि भी सम्मिलित है जिसके द्वारा उत्पादन की वृद्धि सम्भव है।

इसके अतिरिक्त आर एफ हैरॉड ने S तथा I को वाछित रूप (Ex-antesense) मे स्वीकार किया है। पूर्ण रोजगार को बनाये रखने हेतु पूर्ण रोजगार आय में से वाछित (Desired or planned or intended or ex-ante) बचत को वाछित निवेश की समान मात्रा द्वारा प्रतिसन्तुलित कर देना चाहिये।

अत हैराड के अनुसार, द्वितीय आधारभूत समीकरण, जो कि नियमित वृद्धि के सन्तुलन को व्यक्त करता है, निम्न प्रकार है

$$G_w C_r = s$$

यहाँ G_w = वृद्धि की अभीष्ट दर (Warranted rate of growth)
C_r = पूँजी की वह मात्रा जो कि उत्पादन की इकाई-वृद्धि हेतु आवश्यक हो।

वृद्धि की अभीष्ट दर का निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है

आय-वृद्धि की वह दर $\left(\text{अर्थात्} \frac{\Delta Y}{Y}\right)$ जोकि वर्धित पूँजी स्टॉक के पूर्ण उपयोग के लिये आवश्यक हो जिससे कि उद्यमियों को वास्तव में किये गये निवेश द्वारा पूर्ण सन्तुष्टि प्राप्त हो सके।

इसी प्रकार C_r वह पूँजी अर्थात् पूँजी गुणाक $\left(\frac{I}{\Delta Y}\right)$ है जो कि उत्पादन के स्तर को विद्यमान रखने हेतु आवश्यक है, ताकि उपभोक्ता की आय वृद्धि के फलस्वरूप उपभोग की माँग को सन्तुष्ट किया जा सके। अत स्पष्ट है कि, C_r पूँजी की वह मात्रा है जो कि G_w से प्रदर्शित विकास दर को बनाये रखने हेतु आवश्यक है।

अस्तु, हैरॉड विकास निदर्श के दो महत्वपूर्ण समीकरण निम्नाकित है

$$GC = s \quad (2\ 6b)$$

तथा $$G_w C_r = s \quad (2\ 7)$$

अतएव $$GC = G_w C_r$$

समीकरण (2 7) की मान्यता है कि अर्थव्यवस्था प्रत्येक समय कीन्स की सन्तुलन की स्थिति में है, जहाँ वाछित निवेश वाछित बचत के बराबर है[1]

इसका अर्थ यह है कि समीकरण (7) केवल एक सम्भव पथ को निर्दिष्ट करता है, जोकि नियमित विकास का पथ है। वास्तव में, अर्थव्यवस्था विकास के कुछ अन्य पथों का भी अनुसरण कर सकती है। मुख्य निष्कर्ष इस प्रकार हैं

(1) यदि G (विकास की वास्तविक दर) G_w (विकास की दर) से अधिक है, तब C *(पूँजी का वास्तविक सचय) का मान* C_r *(पूँजी सचय) से कम होना चाहिये। इस* स्थिति में पूँजी की कमी हो जायेगी, पूँजीगत वस्तुओं की मात्रा उनकी वास्तविक मात्रा से *अधिक होगी। इस अवस्था में अत्यन्त भयानक स्फीति अन्तराल प्रकट होगा। अर्थात् वाछित* निवेश वाछित बचत से अधिक होना चाहिये तथा उत्पादन कुल माँग से कम होना चाहिये। हमें यह स्मरण रखना चाहिये कि प्रो० डोमर ने भी निवेश की वृद्धि दर $\alpha\ \sigma$ से अधिक होने की सम्भावना पर विचार करते समय यही तथ्य प्रस्तुत किया है।

(2) यदि वास्तविक आय में विकास की अभीष्ट दर की अपेक्षा मन्द गति से वृद्धि होती है, अथवा $G < G_w$, तब पूँजी का वास्तविक सचय आवश्यक पूँजी सचय से अधिक हो जायेगा, अर्थात् $C > C_r$ तथा एक अत्यन्त भयानक अवस्फीति अन्तराल प्रकट होगा। अतएव स्पष्ट है कि वाछित बचत वाछित निवेश की अपेक्षा अधिक होगी तथा उत्पादक अपने सम्पूर्ण उत्पादन का विक्रय न कर सकेंगे। डोमर का दृष्टिकोण भी इसी प्रकार है, *तब वह निवेश में वृद्धि की दर $\alpha\sigma$ से कम होने की सम्भावना पर विचार करता है।*

हैरॉड के मतानुसार– G तथा G_w का अन्तर अस्थिर है। यदि G, G_w से पृथक् है, तब यह इससे दूर और अधिक दूर होता चला जायेगा तथा अपनी पूर्व स्थिति को कभी भी प्राप्त नहीं कर सकेगा। परन्तु हैरॉड ने उत्पादन के विस्तार की एक उच्च सीमा प्रस्तुत की है। यह उच्च सीमा "पूर्ण रोजगार उच्च सीमा" अथवा *विकास की अधिकतम सम्भावित दर* है। उच्च सीमा श्रम तथा प्राकृतिक साधनों की प्राप्यता द्वारा निर्धारित की जाती है। इस उच्च सीमा को G_n द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है तथा इसको *विकास की प्राकृतिक दर* भी कहा जाता है। समयानुसार, उत्पादन के साधन में वृद्धि तथा प्रौद्योगिकी प्रगति होने की अवस्था में उच्चसीमा परिवर्तित भी हो सकती है। परन्तु,

---

1 $$G_w C_r = s$$

अतएव $$\frac{\Delta Y}{Y} \cdot \frac{I}{\Delta Y} = \frac{S}{Y}$$

अथवा $$I = S$$

अर्थात् वाछित (Ex-ante) निवेश वाछित बचत के बराबर होना चाहिए।

$$G_n \leq G_w \text{ तथा } G$$

यहाँ G_n = विकास की प्राकृतिक दर (पूर्ण रोजगार की उच्चसीमा)
G_w = विकास की अभीष्ट दर
G = विकास की वास्तविक दर

हैरॉड के अनुसार, $G > G_w$, की अवस्था में अर्थव्यवस्था की निरन्तर विस्तार होता है जब तक कि G_n (उच्च सीमा) की स्थिति पर न आ जाये। साधनों तथा श्रम पूर्ति की सीमाओं के कारण अर्थव्यवस्था में G_n से ऊपर वृद्धि नहीं हो सकती।

इस उच्च सीमा पर अधिक समय तक तथा स्थिर अर्थव्यवस्था नहीं रह सकती है। इसमें कमी हो सकती है अथवा वृद्धि हो सकती है। चूँकि इसमें वृद्धि नहीं हो सकती, अतएव यह निम्न स्थिति की ओर प्रवृत्त होगी, परिणामस्वरूप अति उत्पादन (Over production) होगा तथा अत्यन्त भयानक बेरोजगारी उत्पन्न हो जायेगी।

वास्तव में व्यापारिक चक्र प्रतिबन्धित है, तथा ये अपनी सीमाओं के अन्तर्गत ही स्वतन्त्र रूप से विचरण कर सकते है। वृद्धि की दिशा में G_n, 'पूर्ण रोजगार उच्च सीमा' प्रस्तुत करती है क्योंकि अल्पकाल में श्रम तथा पूँजी के अभाव में इसके बिना आय में वृद्धि नहीं हो सकती।

अधोगति की दिशा में, स्वायत्त निवेश द्वारा सीमा निर्धारित की जाती है जोकि उपभोक्ता फलन का विच्छेद बिन्दु (Break even point) होता है। सम्पूर्ण निवेश की सम्भावना ऋणात्मक हो जाती है। अनिवेश मंदी की दर से अधिक नहीं हो सकता तथा वास्तव में निवेश का प्रतिस्थापन करता है।[1]

सयुक्त हैरॉड-डोमर निदर्श (Combined Harrod- Domar Model)

हैरॉड निदर्श को सरलतापूर्वक डोमर निदर्श में रूपान्तरित किया जा सकता है। दोनों निदर्श यह व्यक्त करते है कि पूर्ण रोजगार को बनाये रखने हेतु आय के पूर्ण रोजगार स्तर में से वांछित बचत, को वांछित निवेश की समान मात्रा द्वारा प्रति सतुलित कर दिया जाता है। मान लो S^* वांछित बचत तथा I^* वांछित निवेश है। तब,

$$S^* = \alpha Y \quad \text{यहाँ } \alpha = \text{बचत की सीमांत प्रवृत्ति}$$

$$(MPS = APS)$$

$$\text{तथा} \quad I^* = v \Delta Y \quad \text{यहाँ } v = \text{पूँजी गुणांक (अथवा त्वरण)}$$

---

1 Prof Hicks has analysed these constraints in some detail in his analysis of trade cycles He has also defined the Harrod Domar analysis by introducing lags and monetory factors

अब आय के पूर्ण रोजगार स्तर पर,

$$S^{*} = I^{*}$$

अथवा $\alpha Y = v \Delta Y$

अथवा $\dfrac{\Delta Y}{Y} = \dfrac{\alpha}{v}$ (2 8)

अत स्पष्ट है कि नियमित विकास हेतु आय की वृद्धि दर $\frac{\alpha}{v}$ अथवा $\frac{\alpha}{v} \times 100\%$ प्रति वर्ष होनी चाहिये। यह विकास की दर डोमर के $\alpha\sigma$ तथा हैरॉड के G_n के बराबर है। इस *प्रकार विकास की सतुलित दर गुणक के आकार पर निर्भर करती है,* जो कि α *तथा नवीन* निवेश (σ या 1/v) द्वारा निर्धारित होती है। विकास की इस दर से यह आश्वासन प्राप्त होता है कि प्रत्येक वर्ष की आय पूर्व वर्ष की आय की अपेक्षा अधिक होती है, जिससे पूर्व वर्ष में अतिरिक्त वर्धित क्षमता के फलस्वरूप वर्धित उत्पादन का उपभोग किया जा सके।

स्थैतिक निदर्शों की सीमाएँ (Limitation of Static Models)

हैरॉड-डोमर के निदर्शों की निम्नलिखित आधारों पर आलोचना की जाती है

(1) इन निदर्शों में यह मान लिया जाता है कि महत्त्वपूर्ण प्राचल जैसे, बचत की सीमात प्रवृत्ति, पूँजी निर्गत अनुपात, पूँजी-श्रम अनुपात, श्रम-निर्गत अनुपात स्थिर है। वास्तव में इन प्राचलों में समयावधि मे परिवर्तन होते है। प्राचलों के इन परिवर्तनों के फलस्वरूप नियमित विकास हेतु आवश्यक तथ्यों में परिवर्तन होते है। यदि इन अनुपातों में किसी दिशा *में परिवर्तन होते है तब विकास दर मे भी परिवर्तन हो जायेगा तथा निदर्श सत्यता को निर्दिष्ट* नही कर सकेंगे जिसके लिये उनकी रचना की गयी है।

(2) *अर्थव्यवस्था की दीर्घकालीन वृद्धि (अथवा विकास) की व्याख्या करने हेतु स्थिर* उत्पादन फलन की मान्यता अवास्तविक है। दीर्घकाल में श्रम को पूँजी के स्थान पर तथा पूँजी को श्रम के स्थान पर प्रयुक्त किया जा सकता है। अत इस स्थिति में, नियमित विकास की शर्तें अधिक कठोर नहीं हो सकती है।

(3) इन निदर्शों द्वारा यह ज्ञात नहीं हो सकता कि मूल्य परिवर्तन से नियमित विकास पर क्या प्रभाव पड़ता है। मूल्य में अल्प परिवर्तन अस्थायी अर्थव्यवस्था को स्थायी अर्थव्यवस्था में परिवर्तित कर सकता है। अत नीति निर्धारण में ये निदर्श अधिक उपयोगी *प्रमाणित नहीं हो सके।*

(4) *विकासशील देशों के लिये इन निदर्शों का उपयोग बहुत कम होता है। विकसित पूँजीपति देशो में अर्थव्यवस्था की अस्थिरता के निवारण हेतु ये निदर्श अत्यन्त उपयोगी हैं।* कम विकसित देशों की समस्या 'अस्थिरता' नहीं बल्कि 'विकास' है। यद्यपि बेरोजगारी दोनों–

विकसित तथा विकासशील अर्थव्यवस्थाओं की उभयनिष्ठ समस्या हो सकती है, परन्तु दोनों प्रकार की अर्थव्यवस्था वाले देशों के लिये बेरोजगारी के कारण भिन्न-भिन्न है। विकसित देशों में बेरोजगारी का कारण प्रभावशील माँग की कमी है, जिसका समाधान इन निदर्शों द्वारा सम्भव है, परन्तु विकासशील देशों में बेरोजगारी का कारण 'विकास की कमी' है जिसके समाधान हेतु ये निदर्श कोई सुझाव प्रस्तुत नहीं करते।

(5) इन निदर्शों में चरों की समय विलम्बता पर विचार नहीं किया जाता है, जोकि वास्तविकता से परे है।

हैरॉड तथा डामर का प्रावैगिक निदर्श
(Dynamic Model of Harrod and Domar)

हैरॉड तथा डोमर के स्थैतिक निदश म बचत तथा निवेश को समान मान लेना दोषपूर्ण है। क्योंकि वास्तव में वांछित नियोजित (Ex-ante) अवस्था में बचत तथा निवेश के मध्य अन्तर पाया जाता है। हैरॉड तथा डामर के प्रावैगिक निदर्श में उपयोग तथा बचत सम्बन्धों में किसी निश्चित समयावधि का विलम्बन (Lag) मान लेते है। स्मरणीय है कि निवेश के पक्ष म कोई विलम्बन नहीं माना जाता अर्थात् त्वरक को बिना किसी समय विलम्बन के मान लिया जाता है।

अब हम एक सरल बन्द आर्थिक व्यवस्था की कल्पना करते है, इस आर्थिक व्यवस्था के अन्तर्गत सरकार की कोई स्पष्ट क्रियाएँ नहीं होती है (अर्थात् वस्तुओं तथा सेवाओं का आयात अथवा निर्यात नहीं होता है)।

हम निम्न सामूहिक चरों पर विचार करते है

S – बचत Y = आय अथवा निर्गत

K = पूँजी, स्टॉक तथा I = शुद्ध निवेश

अब प्रतीक रूप में इस व्यवस्था की निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

(i) बचत-आय अनुपात अथवा बचत की औसत प्रवृत्ति को निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है

$$s = \frac{S}{Y}$$

अथवा $$S = sY$$

(ii) पूँजी-निर्गत अनुपात अथवा त्वरण सिद्धान्त को निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है

$$v = \frac{K}{Y}$$

अथवा $K = vY$

(ii) शुद्ध निवेश को निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है

$$I = K_t - K_{t-1}$$

यहाँ t = समय

(यहाँ इकाई समय का विलम्बन माना गया है)

सन्तुलन की स्थिति में, $S = I$

अथवा $sY = K_t - K_{t-1}$

अथवा $sY_t = vY_t - vY_{t-1}$

अथवा $sY_t = v(Y_t - Y_{t-1})$ (2.9)

समीकरण (2.9) ही अभीष्ट प्रावैगिक हैरॉड-डोमर निदर्श है, जोकि गुणक $(1/s)$ तथा त्वरक (v) को संयुक्त रूप में व्यक्त करता है।

आय के ज्ञात प्रारम्भिक मान के लिये, इस निदर्श द्वारा विकास-पथ का निर्धारित किया जाता है। विकास-पथ के निर्धारण हेतु समीकरण 9 को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$Y_t = \frac{v}{v-s} Y_{t-1}$$

यदि प्रारम्भिक आय Y_o हो तो क्रमिक समयावधियों (अर्थात् $t = 1, 2, 3, \ldots$) हेतु हम प्राप्त करते है,

$$Y_1 = \frac{v}{v-s} Y_o$$

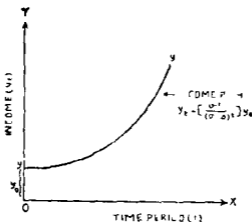
$$Y_2 = \frac{v}{v-s} Y_1 = \frac{v}{v-s} \left(\frac{v}{v-s}\right) Y_o = \frac{v^2}{(v-s)^2} Y_o$$

$$Y_3 = \frac{v}{v-s} Y_2 = \left(\frac{v}{v-s}\right) \frac{v^2}{(v-s)^2} Y_o = \frac{v^3}{(v-s)^3} Y_o$$

$$Y_t = \frac{v^t}{(v-s)^t} Y_o \quad (2.10)$$

अथवा $Y_o = \left(1 - \frac{s}{v}\right)^t Y_t$ (2.10a)

समीकरण (2 10) द्वारा स्पष्ट है कि Y_0 (प्रारम्भिक आय) का मान ज्ञात होने पर अन्य समयावधि के लिये Y का मान किस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है। अर्थात् बचत-निवेश सन्तुलन की दशा द्वारा इस व्यवस्था के अन्तर्गत क्रिया स्तर (Level of activity) अथवा Y का मान ज्ञात किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त आय अथवा निर्गत का समय-पथ धनात्मक प्रकृति का विकास पथ है, जिसमें आय अथवा क्रिया के स्तर में निरन्तर वृद्धि होती रहती है।

यह पथ रेखाचित्र 1 में प्रदर्शित किया गया है।

रेखाचित्र 1

विकास गुणाक को एक से अधिक माना गया है $\left(\text{अर्थात्} \frac{v}{v-s} > 1\right)$। क्योंकि v पूँजी निर्गत अनुपात अथवा त्वरक सम्भवत इकाई से बडी धनात्मक सख्या है, जबकि s बचत की सीमात प्रवृत्ति इकाई से छोटी धनात्मक सख्या है। उदाहरणार्थ, यदि

$v = 4,\ s = 0\ 2$ तब $\frac{v}{v-s} = \frac{4}{4-0\ 2} = \frac{4}{3\ 8}$

अत t के मान में वृद्धि के फलस्वरूप $\left(\frac{v}{v-s}\right)^t = \left(\frac{4}{3\ 8}\right)^t$ में भी उत्तरोत्तर वृद्धि होगी। अर्थात् यह समय-पथ के साथ-साथ परिवर्तित होगा।

हैरॉड तथा डोमर के समीकरणों अथवा निदर्शों की तुलना
(Harrod and Domar Equations or Models Compared)

यद्यपि यह स्पष्ट है कि हैरॉड तथा डोमर के समीकरण एक समान ही है तथा उनके द्वारा समान निष्कर्ष प्राप्त होते है, परन्तु दोनों निदर्शों में कुछ समानता तथा अन्तर भी पाये जाते है, जो कि निम्न प्रकार है

समानता (Similarities)

दोनों निदर्शों की अधिकाश मान्यताएँ समान है। अर्थात् दोनों निदर्शों की मान्यताएँ इस प्रकार है (i) पूर्ण रोजगार की स्थिति को प्राप्त करना, (ii) बन्द अर्थव्यवस्था की कल्पना, (iii) सीमात तथा औसत बचत का बराबर होना, (iv) पूँजी-जमाव द्वारा उत्पादन क्षमता में वृद्धि, (v) पूँजी-निर्गत अनुपात की स्थिरता, (vi) पूँजी गुणाक की स्थिरता, (vii) सरकार का हस्तक्षेप न होना, (viii) समय विलम्बन की अमान्यता (स्थैतिक व्याख्या में) तथा वास्तविक निवेश को वास्तविक बचत के बराबर मानना।

(2) दोनों अर्थशास्त्रियों का विचार है कि पूर्ण रोजगार की स्थिति को बनाये रखने हेतु, आय में पर्याप्त वृद्धि होना आवश्यक है, जिससे कि अतिरिक्त उत्पादन का उपभोग किया जा सके।

(3) दोनों अर्थशास्त्री इस बात पर सहमत है कि निवेश में वृद्धि के फलस्वरूप उत्पादनक्षमता में वृद्धि होती है तथा आय में वृद्धि s/C, के बराबर है। आय वृद्धि की अभीष्ट दर समय की प्रति इकाई आय में वृद्धि की दर के समान है।

असमानता (Dissimilarities)

दोनों निदर्शों में कुछ महत्त्वपूर्ण अन्तर निम्न प्रकार हैं

(1) डोमर निवेश को आय की उस वृद्धि से सम्बद्ध करने में अग्रणी रहे है, जोकि प्राप्त की जाती है, परन्तु इसके विपरीत हैरॉड ने उस विधि पर बल दिया है जिसके द्वारा निवेश को उत्पादन में उद्यमियों द्वारा अनुभवित आय की दर पर लाया जा सके। अर्थात्, हैरॉड ने अपने निदर्श में पूर्ण रोजगार की धारणा को अपनाया है, परन्तु उसको प्राप्त करने का मार्ग दर्शन नहीं किया है।

(2) डोमर ने पूँजी-निर्माण तथा पूर्ण क्षमता की क्रमिक उत्पादन वृद्धि के मध्य तकनीकी एव प्रौद्योगिकी सम्बन्ध प्रदर्शित किया है, परन्तु हैरॉड ने उसके साथ ही, एक ओर तो माँग तथा उसके फलस्वरूप चालू उत्पादन तथा दूसरी ओर पूँजी निर्माण के मध्य व्यावहारिक सम्बन्ध स्थापित किया है।

(3) हैरॉड ने प्रेरित तथा स्वायत्त निवेश के मध्य भी भेद किया है। प्रेरित निवेश (Induced investment) आय की और उसके फलस्वरूप माँग की वृद्धि द्वारा उत्पन्न होता है तथा इसका अधिकाश भाग विगत लाभों द्वारा प्राप्त होता है। स्वायत्त निवेश नवीन आविष्कारों, प्रत्याशाओं एव सरकारी अतिरिक्त निवेश आदि के द्वारा प्रभावित होता है। डोमर का मत है कि निवेश के स्वायत्त भाग की व्याख्या आर्थिक परिवर्तनों द्वारा सन्तोषपूर्वक नहीं की जा सकती है। परन्तु हैरॉड ने स्वायत्त भाग को भी छूट दी है तथा उनके अनुसार स्वायत्त निवेश को आय के स्तर पर निर्भर किया जा सकता है न कि आय की दर पर। इसी विचार

को सम्मिलित करके हैरॉड ने व्यावहारिक सम्बन्ध की खोज की जोकि अर्थव्यवस्था के पूर्ण रोजगार तथा पूर्णक्षमता में वृद्धि के अनुरूप है।

(4) हैरॉड ने तीन विकास दरों की धारणा का प्रयोग किया है, ताकि यह निश्चित किया जा सके कि पूर्ण रोजगार की स्थिति को प्राप्त करने हेतु कौन सी दर आवश्यक है। डोमर केवल एक ही विकास दर पर केन्द्रित रहा है।

(5) डोमर का निदर्श सन्तुलित विकास की तकनीक पर आधारित है, परन्तु हैरॉड का निदर्श असन्तुलित तकनीक से प्रारम्भ करता है तथा सन्तुलित अवस्था की ओर अग्रसर होता है।

(6) हैरॉड ने सीमांत पूँजी-निर्गत अनुपात तथा त्वरक का प्रयोग किया है परन्तु डोमर ने सीमांत पूँजी-निर्गत अनुपात के प्रतिलोम तथा गुणक का प्रयोग किया है।

(7) डोमर ने व्यापारिक चक्रों को आर्थिक विकास-पथ का अभिन्न अंग माना है, परन्तु हैराड के मतानुसार व्यापारिक चक्रों को आर्थिक विकास-पथ से पृथक् किया जा सकता है।

हैरॉड- डामर का मूल निदर्श
(Basic Harrod Domar Model)

गणितीय व्याख्या (Mathematical Treatment[1])

हैरॉड-डोमर के मूल निदर्श के अन्तर्गत अर्थव्यवस्था को दो क्षेत्रों में विभाजित नहीं किया जाता है। इस निदर्श के अन्तर्गत वस्तु-बाजार के सन्तुलन हेतु अध्ययन किया जाता है जिसमें बाजार के स्टॉक करने की पूर्ण क्षमता, बचत अथवा निवेश की ओर बाजार का प्रवाह तथा श्रम बाजर के सन्तुलन का सरल रूप सम्मिलित है। इस संदर्भ में मान्यता यह है कि *श्रम-शक्ति में समयानुसार स्थिर दर से वृद्धि होती है तथा वस्तु-बाजार से माँग द्वारा* इसका पूर्ण उपभोग हो जाता है। पूंजी के पूर्ण रोजगार की श्रम के पूर्ण रोजगार से तुलना की जाती है। प्रश्न यह उत्पन्न होता है कि क्या नियमित विकास दोहरे पूर्ण-रोजगार मापदण्ड (Double full-employment criterion) के संगत है?

इस निदर्श को विभिन्न आर्थिक निर्वचनों के अनुसार दो रूपों में विभाजित किया गया है

(i) स्थिर गुणाक पाठान्तर (Fixed Coefficient Version)

(ii) गुणाक-त्वरक पाठान्तर (Multiplier- Accelerator Version)

---

1 R G.D Allen Micro Economic Theory 1970

स्थिर गुणाक पाठान्तर (Fixed coefficient Version)

यहाँ उत्पादन फलन के गुणाकों को स्थिर माना लिया जाता है, अर्थात् इस प्रकार के उत्पादन फलन का अध्ययन किया जाता है जिसके गुणाक स्थिर हों। अर्थात्, उत्पादन साधन जैसे पूँजी तथा श्रम का उपभोग स्थिर अनुपातों में किया जाता है। आगत-निर्गत के मध्य स्थिर सम्बन्ध की मान्यतानुसार समस्त चर सतत तथा अवकलन योग्य (Differentiable) है। ये चर आय (y) तथा श्रम शक्ति (L) है, जोकि समय की प्रति इकाई द्वारा निर्धारित होते है। पूँजी स्टॉक K तथा इसके अवकलन (Derivative) ΔK के निवेश को प्रवाह मान (flow value) के रूप में प्रयुक्त किया जाता है।

वस्तु बाजार के सन्तुलन को पूँजी स्टॉक की पूर्ण क्षमता तथा प्रवाह शर्तों के महत्त्वपूर्ण समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जाता है। पूँजी की पूर्णक्षमता का समीकरण $K = vY$ है। यहाँ v एक स्थिर गुणाक है। प्रवाह शर्त का समीकरण $I = \frac{dK}{dt} = sY$ है। यहाँ s एक स्थिर गुणाक है। प्रवाह शर्त के समीकरण के अन्तर्गत नियोजित बचत तथा निवेश को बराबर माना जाता है। श्रम-बाजार का सन्तुलन एक समीकरण द्वारा प्रदर्शित होता है, जोकि श्रम-शक्ति की पूर्ण रोजगार की शर्त को व्यक्त करता है।

अस्तु, हैरॉड-डोमर के मूल निदर्श की स्थिर-गुणाक व्याख्या में निम्नलिखित मान्यताएँ (निदर्श के समीकरणों के रूप में) हैं

मान्यताएँ अथवा निदर्श के समीकरण (Assumptions or equations of the Model)

(1) $K = vY$ अथवा $Y = \frac{1}{v} K$

यहाँ K = पूँजी का भण्डार
v = पूँजी-निर्गत अनुपात
Y = राष्ट्रीय आय (निर्गत)

इस समीकरण को उत्पादन फलन का समीकरण कहते है। यहाँ स्थिर गुणाक v उत्पादन (y) को अन्य उत्पादन साधन पूँजी (K) से सम्बन्धित करता है।

इसी प्रकार, अन्य स्थिर गुणाक u, श्रम का उत्पादन स्तर में सम्बन्ध स्थापित करता है। अर्थात्

$L = uY$ अथवा $Y = \frac{1}{u} L$

यहाँ u = श्रम-निर्गत अनुपात

यह प्रत्येक विन्दु (समय) पर उत्पादन की पूर्ण क्षमता को दर्शित करता है।

(2) $I = \frac{dK}{dt} = sY$ अथवा $I = S$

यहाँ I = निवेश

s = वचत की दर

S = कुल वचत

इस समीकरण द्वारा स्पष्ट होता है कि निवेश पूँजी सम्पत्ति में वृद्धि के बराबर है तथा निवेश और वचत नियोजित रूप में बराबर है।

(3) $L = L_o e^{nt}$

यहाँ n = श्रम- शक्ति की स्वाभाविक (प्राकृतिक) विकास दर

L_o = प्रारम्भिक श्रम शक्ति

t = समयावधि

यह समीकरण व्यक्त करता है कि श्रम शक्ति में समय के साथ चर घाताकी रूप म (Exponentially) वृद्धि होती है। अर्थात् श्रम की पूर्ति में स्थिर दर n से वृद्धि हो रही है

$$\frac{\Delta L}{L} = \Delta \log L = n$$

प्रारम्भिक श्रम-शक्ति L_o से समाकलन (integration) करने पर हम प्राप्त करते है,

$$\log_e L = \log_e L_o + nt$$

$$L = L_o e^{nt}$$

पुन , श्रम के लिये माँग को वस्तु बाजार द्वारा उत्पादन फलन के स्थिर गुणाक u (*जैसाकि प्रथम मान्यता में परिभाषित किया गया है) को प्रयुक्त करके निधारित किया जाता* है।

$$L = uY$$

अब u को स्थिर मानकर यदि Y का मान एक बार ज्ञात कर लिया जाये तब हम L का मान निकाल सकते है।

अत श्रम-बाजार सन्तुलन हेतु निम्न समीकरण आवश्यक है

$$L = uY = L_o e^{nt}$$

उपर्युक्त विवरण द्वारा हमें ज्ञात होता है कि हैरॉड-डोमर के मूल निदर्श (स्थिर गुणाक व्याख्या) में तीन समय चर Y, K एवं L है तथा इनका पथ वस्तु-बाजार तथा श्रम-बाजार के निम्नलिखित सन्तुलन समीकरणों द्वारा व्यक्त होता है

$$\left.\begin{aligned} K &= vY && \rightarrow \text{पूर्ण क्षमता समीकरण अथवा शर्त} \\ I &= \frac{dK}{dt} = sY && \rightarrow \text{बचत बराबर निवेश समीकरण} \\ L - uY &= L_o e^{nt} && \rightarrow \text{पूर्ण रोजगार समीकरण अथवा शत} \end{aligned}\right\} \quad (2\ 11)$$

यह ही अभीष्ट मान्यताएँ है।

हल (Solution)

प्रथम शर्त के अनुसार,

$$K - vY$$

अथवा $\dfrac{dK}{dt} = v\dfrac{dY}{dt}$

अब $\dfrac{dK}{dt} = sY$ रखने पर

$$sY = v\frac{dY}{dt}$$

अथवा $sY = v\dot{Y}$ $\left(\text{यहा } \dot{Y} = \dfrac{dY}{dt}\right)$

अथवा $\dfrac{\dot{Y}}{Y} = \dfrac{s}{v}$ = उत्पादन (आय) वर्द्धन की अभीष्ट दर (2 12)

जिसको प्राय विकास की परिमाप्कि दर भी कहा जाता है।

इसी प्रकार

$$\frac{dK}{dt} = \dot{K} \quad \frac{dL}{dt} = \dot{L} \text{ लिखने पर}$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \text{पूँजी-वर्द्धन की अभीष्ट दर}$$

तथा $\dfrac{\dot{L}}{L}$ श्रम-वर्द्धन की अभीष्ट दर

अस्तु, समीकरण 12 व्यक्त करता है कि प्रारम्भिक उत्पादन Y_o ज्ञात होने की अवस्था में हम किसी भी समयावधि हेतु उत्पादन-स्तर ज्ञात कर सकते हैं

$$Y_t = Y_o e^{rt} \quad (13)$$

अर्थात् आय में घाताकी (Exponentially) रूप में वृद्धि होती है।

इसके अतिरिक्त, प्रथम मान्यता द्वारा,

$$K_t = vY_t$$

समीकरण (13) से Y_t का मान रखने पर हम प्राप्त करते है,

$$K_t = vY_o e^{gt} = K^o e^{gt} \quad (2\ 14)$$

यहाँ $K_o = vY_o$

अतएव, पूँजी में वृद्धि भी घाताकी रूप में होती है।

इसी प्रकार, समीकरण $L = uY$ द्वारा

अथवा $\log L = \log u + \log y$

अथवा $\frac{1}{L} = \frac{dL}{dt} = \frac{1}{Y} \quad \frac{dY}{dt}$

अथवा $\frac{L}{L} = \frac{Y}{Y}$

अथवा $\frac{L}{L} = \frac{Y}{Y} = g$ = उत्पादन की विकास दर (2 15)

अतएव, समीकरण (2 15) व्यक्त करता है कि श्रम की विकास दर (श्रम की माँग) उत्पादन की विकास दर के बराबर होनी चाहिये।

परन्तु, श्रमशक्ति के विकास की स्वाभाविक दर (श्रम-पूर्ति के रूप में) n है। अस्तु, पूर्ण रोजगार सतुलन की स्थिति में आधारभूत शर्त (Fundamental Condition) अग्रलिखित है

$$g = \frac{s}{v} = n \quad (2\ 16)$$

↓ विकास की अभीष्ट दर ↓ विकास की स्वाभाविक दर

आवश्यक समीकरण (2 16) के सतुष्ट होने की स्थिति में, तीनों चरों - Y, K तथा L– के नियमित विकास पथ निम्न प्रस्तुत किए जा सकते है

$$Y_t = Y_o e^{gt}$$
$$K_t = K_o e^{gt} \quad (2\ 17)$$
$$L_t = L_o e^{gt}$$

यहाँ $g = \frac{s}{v} = n$

यह स्मरणीय है कि हल के प्रतिपादन में स्थिर गुणाक u प्रकट नहीं होता है। प्रारम्भिक मान Y_o K_o तथा L_o उत्पादन फलन द्वारा उपयुक्त रूप से सम्बन्धित होने चाहिये, अर्थात् $K_o = vY_o$ तथा $L_o = uY_o$। अत यहाँ u तथा v दोनों की आवश्यकता है। उदाहरणार्थ, यदि L_o को स्वतत्र प्रारम्भिक शर्त (श्रम शक्ति द्वारा दिया गया) मान लिए जाने पर नियमित विकास की अवस्था के पथ 17 को L_o के पदों म निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\left.\begin{aligned} Y_t &= \frac{1}{u} L_o e^{gt} \\ K_t &= \frac{v}{u} L_o e^{gt} \\ L_t &= L_o e^{gt} \end{aligned}\right\} \quad (2\ 18)$$

यहाँ $g = \frac{s}{v} = n$

यहाँ स्थिर गुणाक v का निर्वचन महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि इसके द्वारा ही हैरोड-डोमर के मूल निदर्शों के दोनों रूपों (व्याख्याओं) का अन्तर ज्ञात होता है। यहाँ पूर्ण क्षमता की मान्यता, अर्थात् $K = vY$, को $Y = \frac{1}{v}K$ समझा जाता है, पूँजी स्टॉक K का मान ज्ञात होने पर उत्पादन की पूर्ण क्षमता Y होगी। यहाँ अनुपात

$$\frac{1}{v} = \frac{\text{उत्पादन क्षमता}}{\text{स्टॉक क्षमता}} = \text{स्थिर}$$

अर्थात्, यह पूँजी-निर्गत अनुपात नहीं है, अपितु इसको निर्गत-पूँजी अनुपात कहा जाता है।

गुणक-त्वरक पाठान्तर (Multiplier- Accelerator Version)

इस पाठान्तर के अन्तर्गत स्थिर गुणाक v की विभिन्न व्याख्या पूँजी-निर्गत अनुपात अथवा त्वरक के रूप में की जाती है। यहाँ वस्तु-बाजार निम्न समीकरण को ग्रहण करता है

$$K = vY$$

अर्थात् वाँछित पूँजी-स्टॉक उत्पादन का एक स्थिर गुणज (Constant multiple) है। इस अनुपात को वृद्धि रूप में लिखा जाता है, ताकि

$$\Delta K = v \Delta Y$$

अथवा $v = \frac{\Delta K}{\Delta y}$ वृद्धि रूप में (Incremental) पूँजी निर्गत अनुपात,

अर्थात् वांछित पूँजी-स्टॉक में परिवर्तन उत्पादन में परिवर्तन का एक गुणक (v) है।

वस्तु बाजार की उपर्युक्त सतुलन शर्त को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$I = v\Delta Y$, यहाँ $I = \Delta K$

अर्थात्, त्वरण सिद्धान्त के अनुसार यह एक निवेश फलन हो जाता है तथा पूँजी स्टॉक (K) का कोई स्पष्ट सन्दर्भ नहीं रह जाता । अस्तु इस रूपान्तर की सतुलन शर्तें निम्नलिखित है

$$\left.\begin{array}{ll} I = v\Delta Y, & \rightarrow \text{निवेश फलन शर्त} \\ I = sY & \rightarrow \text{निवेश बराबर बचत शर्त} \\ I = uY = I_o^{nt} & \rightarrow \text{पूर्ण रोजगार शर्त} \end{array}\right\} \quad (2\ 19)$$

हल •

पूर्वगामी विधि के अनुसार, हम निम्नांकित हल प्राप्त कर सकते हैं

$$\left.\begin{array}{l} Y = Y_o e^{gt} \\ I = I_o e^{gt} \\ L = L_t e^{gt} \end{array}\right\} \quad (20)$$

यहाँ $g = \frac{s}{v} = n$

प्रारम्भिक मान निम्न प्रकार सम्बन्धित है

$I_o = sY_o$ तथा $L_o = uY_o$

अतिरिक्त निवेश के पश्चात् उत्पादन (आय) में $\frac{1}{s}$ गुना वृद्धि हो जाती है, जैसा कि प्रवाह शर्त द्वारा स्पष्ट है

$$I = sY$$

अथवा $\Delta I = s\Delta Y$

अथवा $\Delta Y = \frac{1}{s}\Delta I$

निवेश के फलस्वरूप उत्पादन में वृद्धि हो जाती है, त्वरक भी क्रियाशील हो जाता है ($I = v \Delta Y$) जिसके फलस्वरूप निवेश में वृद्धि होती है तथा पुन गुणक द्वारा उत्पादन में वृद्धि होती है तथा इसी प्रकार यह क्रम चलता रहता है। जब तक किसी बिन्दु पर उत्पादन में वृद्धि होती रहेगी तब तक गुणक तथा त्वरक नियमित विकास की अवस्था उत्पन्न करने हेतु सयुक्त रूप से प्रयत्नशील रहेगे।

निष्कर्ष रूप में हम यह कह सकते हैं कि हैरोड-डोमर के मूल निदर्श के दोनों रूपान्तर आर्थिक व्याख्या में भिन्न है, एक स्थिर निर्गत पूँजी अनुपात ($1/v = Y/K$) की मान्यता पर निर्भर करता है, तथा द्वितीय, वस्तु-बाजार के निवेश फलन के अन्तर्गत, स्थिर वांछित निर्गत अनुपात ($v = K/Y$) पर निर्भर करता है।

गणितीय रूप में ये दोनों रूपान्तर समान है तथा नियमित विकास का एक ही अनन्य (unique) हल प्रदान करते है, यदि $g = s/v = n$

इसके अतिरिक्त, पूर्णरोजगार की शर्त $K = vY$ द्वारा अवकलन करने पर $I = v\frac{dY}{dt}$ प्राप्त होता है, तथा निवेश फलन $I = \frac{dy}{dt}$ को समाकलन करने पर $K = vY$ प्राप्त होता है।

समयावधि विश्लेषण (Period Analysis)

हैरोड-डोमर के मूल निदर्श के दोनों रूपान्तरों को समयावधि रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है। चर Y_t (उत्पादन अथवा आय) तथा L_t (श्रम की पूर्ति) समयावधि श्रेणी $t = 0, 1, 2,$ के प्रवाह चर है तथा प्रारम्भ में पूँजी स्टॉक K_t से निम्न प्रकार सम्बन्धित है

$$K_t = vY_t$$

तथा $$L_t = vY_t$$

मान लो t समयावधि में निवेश I_t है,

$$I_t = K_{t+1} - K_t \qquad t = 0, 1, 2,$$

श्रम-बाजार में, समय विलम्बन की अनुपस्थिति में, दोनों रूपान्तरो के अन्तर्गत श्रम-माँग तथा श्रम-पूर्ति के इस रूप $L_t = uY_t$ में व्यक्त किया गया था, यहाँ श्रम-पूर्ति की वृद्धि की दर को n के बराबर मान लिया गया था। परन्तु समयावधि रूप में, विकास में असतत सयोजन सम्मिलित रहता है, जिसकी दर n प्रति समयावधि होती है। अर्थात्

$$n = \frac{\Delta L}{L_t} = \frac{L_{t+1} - L_t}{L_t}$$

अथवा $L_{t+1} = L_t + nL_t = (1 + n) L_t$

यदि प्रारम्भिक श्रम-शक्ति L_o हो तब

$$L_{t+1} = (1 + n)^t L_o$$

(I) अब प्रथम पाठान्तर (स्थिर गुणांक पाठान्तर) की पूर्ण क्षमता की शर्त निम्नलिखित है

$K_t = vY_t$ प्रत्येक समयावधि में

अस्तु, सन्तुलन शर्त की तीन मान्यताएँ निम्नांकित हैं

$$\left.\begin{array}{ll} K_t = vY_t & \rightarrow \text{पूर्ण क्षमता} \\ K_{t+1} - K_t = sY_t & \rightarrow \text{निवेश बचत के बराबर है} \\ L_t = uY_t = L_o (1 + n)^t & \rightarrow \text{पूर्ण रोजगार} \end{array}\right\} \quad (2\ 21)$$

समीकरण (2 21) हैरोड डोमर के मौलिक निदर्श के स्थिर गुणांक रूपान्तर (समयावधि के रूप में) की मान्यताएँ (Assumptions) हैं।

हल . मान्यताओं के अनुसार, हमें ज्ञात है,

$$K_t = vY_t$$

$$K_{t-1} = vY_t - vY_{t-1}$$

अथवा $K_t - K_{t-1} = vY_t - vY_{t-1} = sY_{t-1}$

अथवा $v(Y_t - Y_{t-1}) = sY_{t-1}$

अथवा $v\Delta Y = sY_{t-1}$

अथवा $\frac{\Delta Y}{Y_{t-1}} = \frac{s}{v} = g$ = उत्पादन की विकास-दर

अथवा $\frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = g$

अथवा $Y_t = (1 + g) Y_{t-1}$

यदि प्रारम्भिक मान Y_o हो तो $t = 1, 2,$ रखने पर हम प्राप्त करते है,

$$Y_t = Y_o (1 + g)^t \quad ..\ (2\ 22)$$

इसी प्रकार,

$$K_t = vY_t$$

$= vY_o (1 + g)^t$, यहाँ $Y_t = Y_o (1 + g)^t$

$$= K (1 + g)^t \quad ..\ (2\ 23)$$

यहाँ $K_o = vY_o$

माँग पक्ष की पूर्ण रोजगार शर्त की सहायता द्वारा,

$$\begin{aligned} L_t &= uY_t \\ &= uY_o(1+g)^t \quad \text{यहाँ } Y_t = Y_o(1+g)^t \\ &= L_o(1+g)^t \end{aligned} \qquad (2\ 24)$$

यहाँ $L_o = uY_o$

समीकरण (2 24) व्यक्त करता है कि श्रम की माँग में पूर्ण रोजगार की स्थिति के अन्तर्गत g दर से वृद्धि हो रही है, जबकि श्रम पूर्ति की वृद्धि दर n के बराबर दी हुई है। अतएव यह निदर्श यदि और केवल यदि सगत है

$$g = n \qquad (2\ 25)$$

अर्थात् विकास की अभीष्ट दर = विकास की स्वाभाविक दर।

समीकरण 2 25 की सन्तुष्टि की अवस्था में निदर्श के सभी चरों में नियमित विकास होगा तथा उनके विकास पथ के समीकरण निम्न प्रकार होंगे

$$\left.\begin{aligned} Y_t &= Y_o(1+g)^t \\ K_t &= K_o(1+g)^t \\ L_t &= L_o(1+g)^t \end{aligned}\right\} \qquad (2\ 26)$$

यहाँ $g = \frac{s}{v} = n$

(II) द्वितीय पाठान्तर (गुणक-त्वरक रूपान्तर) के अन्तर्गत एक निवेश फलन माना जाता है, जो कि स्थिर गुणाक की भिन्न परिभाषा प्रदान करता है। अर्थात्

$$I_t = v(Y_t - Y_{t-1})$$

यहाँ $v = \frac{I_t}{Y_t - Y_{t-1}} = \frac{I_t}{\Delta Y}$

तात्पर्य यह है कि पूर्व काल के उत्पादन (आय) में परिवर्तन द्वारा नियोजित निवेश स्थिर रहता है, अत अनुपात को स्थिर मान लिया जाता है।

पुन , यह भी माना जाता है कि समयावधि t में बचत नियोजन निवेश नियोजन के अनुरूप है (अर्थात् $I_t = S_t$) जो कि पूर्व काल की आय के फलन हैं (अर्थात् $S_t = sY_{t-1}$)। अस्तु t समय में बचत, $(t-1)$ समय के आय पर निर्भर करती है, अर्थात्

$$I_t = S_t = sY_{t-1}$$

अत हैरोड-डोमर के मूल निदर्श के गुणक-त्वरक रूपान्तर (समयावधि के रूप में) की तीन मान्यताओं के समीकरण निम्नलिखित है

$$\left.\begin{array}{ll} I_t = v(Y_t - Y_{t-1}) & \rightarrow \text{निवेश फलन} \\ I_t = sY_{t-1} & \rightarrow \text{निवेश बराबर बचत} \\ L_t = uY_t = L_0(1+n)^t & \rightarrow \text{पूर्ण रोजगार} \end{array}\right\} \quad (2\ 27)$$

हल : उपर्युक्त विधि के अनुसार,

$$v(Y_t - Y_{t-1}) = I_t = sY_{t-1}$$

अथवा $$\frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = \frac{s}{v} = g = \text{उत्पादन की विकास दर}$$

अथवा $$Y_t = (1+g)\ Y_{t-1}$$

अब यदि प्रारम्भिक मान Y_O ज्ञात हो तब $t = 1, 2,$ रखने पर हम प्राप्त कर सकते है

$$Y_t = (1+g)\ Y_{t-1} = Y_o(1+g)^t \quad (2\ 28)$$

इसी प्रकार,

$$\begin{aligned} L_t &= uY_t \\ &= uY_0(1+g)^t \quad \text{यहाँ } Y_t = Y_0(1+g)^t \\ &= L_0(1+g)^t \quad \text{यहाँ } L_0 = uY_0 \end{aligned} \quad (2\ 29)$$

तथा निवेश बराबर बचत शर्त की सहायता द्वारा,

$$\begin{aligned} I_t &= sY_{t-1} \\ &= sY_0(1+g)^{t-1}, \text{यहाँ } Y_{t-1} = Y_0(1+g)^{t-1} \\ &= I_1(1+g)^{t-1}, \quad \text{यहाँ } I_1 = sY_0 \end{aligned} \quad (2\ 30)$$

हल समीकरण (2 30) प्रथम रूपान्तर के हम समीकरण से भिन्न है। यह अन्तर बचत फलन $I_t = S_t = sY_{t-1}$ के परिणामस्वरूप है। प्रथम समयावधि में निवेश को बचत के बराबर लिया जा सकता है, यह समयावधि 1 है तथा प्रारम्भिक समयावधि में निवेश I_0 निदर्श के सगत नहीं है। अत नियमित हल के समीकरण निम्नलिखित है

$$\left.\begin{array}{l} Y_t = Y_o(1+g)^t \\ I_t = I_1(1+g)^{t-1} \\ L_t = L_0(1+g)^t \end{array}\right\} \quad (2\ 31)$$

यहाँ $g = \frac{s}{v} = n$

$t = 1, 2,$

यथा $I_1 = sY_0$ एव $L_0 = uY_0$

निदर्श की आलोचनाएँ (Criticism of the Model)

निदर्श की आलोचनाएँ इनकी मान्यताओं पर आधारित है

(i) निदर्श हेतु यह माना जाता है कि आय का एक स्थिर अनुपात (s) बचत के रूप में रहता है, परन्तु बचत व्यक्तियों की मुद्रा को रखने की आदत पर निर्भर करती है। आदते स्थिर नहीं मानी जा सकती है।

(ii) इस निदर्श मे पूँजी-निर्गत अनुपात को स्थिर माना गया है, जबकि प्रौद्योगिकी मे परिवर्तन के साथ-साथ पूँजी निर्गत अनुपात भी परिवर्तित हो सकता है।

(iii) यह निदर्श श्रम-पूर्ति की दर को स्थिर मानता है, जो कि वास्तविक विश्व में सम्भव नहीं है। श्रम-पूर्ति अनेको उपादानों पर निर्भर करती है। उदाहरणार्थ, सरकार की जनसख्या नीति, विज्ञान का विकास तथा अनेक सामाजिक एव आर्थिक उपादान। इन उपादानों को स्थिर नहीं माना जा सकता है।

(iv) नियमित विकास हल केवल तभी प्राप्त होता है, जबकि तीन प्राचलों मे निम्न सम्बन्ध विद्यमान हों

$$s/v = n$$

इस अवस्था को आकस्मिक कहा जा सकता है तथा आकस्मिक आधार पर किसी निदर्श की रचना नही की जा सकती है।

(v) यदि यह मान भी लिया जाये कि तीनों प्राचल (s, v तथा (n)) ज्ञात है, तब प्रश्न उत्पन्न होता है कि क्या आधारभूत समीकरण $s/v = n$ सन्तुष्ट होता है। मानलो, $s = 0\ 1$ तथा $v = 4$, तब

$$g = \frac{s}{v} = \frac{0\ 1}{4} = 0\ 025 \text{ अथवा } 2^1/_2\% \text{ प्रतिवर्ष।}$$

अर्थात् सन्तुलन की अवस्था मे, श्रम शक्ति में $2^1/_2\%$ प्रतिवर्ष की दर से वृद्धि होनी चाहिए। परन्तु यदि $s = 0\ 2$ (अथवा 20%) तथा $v = 2$ तब $g = 10\%$ प्रतिवर्ष। श्रमशक्ति में 10% प्रति वर्ष वृद्धि दर सम्भव नहीं मानी जा सकती है, अत निदर्श असन्तुलित है।

(vi) श्रम-बाजार में सन्तुलन की शर्त का अभिप्राय यह है कि प्राप्य श्रम पूर्ति का पूर्ण उपयोग हो रहा है। श्रम दर की उपेक्षा की जाती है। वस्तु बाजार में लाभ दर की भी उपेक्षा की जाती है। अतएव हैरॉड-डोमर निदर्श अर्थव्यवस्था के अन्तर्गत आय वितरण सिद्धान्त से पृथक रहता है।

रेखीय प्रक्रमन विकास निदर्श
(A Linear Programming model of Growth)

पूर्ण पृष्ठांकित अध्ययन द्वारा स्पष्ट है कि हैरॉड-डोमर निदर्श की कुछ अनम्य (Rigid) मान्यताएँ है जिनके फलस्वरूप इसकी आलोचना की जाती है। हैरॉड-डोमर के मूल निदर्श का उपयोग करने हेतु कुछ मान्यताओं की अवहेलना की जा सकती है अथवा उनको नम्य किया जा सकता है, यह एक अथवा अनेक विधियों द्वारा सम्भव है।[1] किसी मान्यता की अवहेलना की जा सकती है अथवा उसके स्थान पर अन्य मान्यता को प्रतिस्थापित किया जा सकता है, ताकि निदर्श की रचना उपयोग करने योग्य की जा सके।

अधिक आशाजनक विधि है कि s तथा/ अथवा v को विभिन्न मान लेने की स्वतन्त्रता प्रदान की जावे, ताकि अभीष्ट विकास दर ($g = s/v$) के विभिन्न मान सम्भव हो सकें। अब हमारी समस्या यह है कि g के विभिन्न मानों में से कौन सा मान दी हुई (Given) स्वाभाविक विकास दर (n) के बराबर है तथा s एवं/ अथवा v सगम मान क्या है? रेखीय प्रक्रमन निदर्श में इसी समस्या का हल प्रस्तुत करने का प्रयास किया जाता है। वर्तमान निदर्श में हम v के दो वैकल्पिक मान लेते हैं

हैरॉड-डोमर निदर्श में v का मान को स्थिर माना गया है, अर्थात केवल एक उत्पादन फलन अथवा उत्पादन प्रक्रिया का अध्ययन किया गया है। अर्थात्, इस निदर्श द्वारा अर्थव्यवस्था में स्थिर प्रतिफल की कल्पना की जाती है।

परन्तु रेखीय प्रक्रमन निदर्श में इस मान्यता का परित्याग किया जाता है। यह माना जाता है कि अर्थव्यवस्था में स्थिर प्रतिफल की स्थिति विद्यमान नहीं हो सकती है, परन्तु अनेक प्रक्रियाए उपलब्ध है। हमें इनमें से एक का इस प्रकार चयन करना है कि वह श्रम विकास की स्वाभाविक दर के लिए उपयुक्त हो। यदि इस प्रकार की एक उत्पादन प्रक्रिया प्राप्त होने की सम्भावना नहीं हो तव हम दो अथवा अधिक प्रक्रियाओं को मिश्रित कर सकते है, ताकि दो दरों में वांछित समानता उत्पन्न की जा सके (अर्थात् $g=n$)

---

1 (i) F H Kahn and R.C O Mathews "The theory of Economic Growth" A survey, *Economic Journal* Dec 1964
(ii) R.F Kahn "Exercises in the Analysis of Growth" *Oxford Economic Papers* June, 1959

हम रेखीय प्रक्रमन प्रकार का एक उत्पादन फलन मान लें जिसके अन्तर्गत दो अथवा अधिक उत्पादन प्रक्रियाएँ विशेष रूप से उल्लिखित की गई हों। इनको पृथक्-पृथक् अथवा सामूहिक रूप में भी प्रयुक्त किया जा सकता है। हम यहाँ दो उत्पादन प्रक्रियाओं पर विचार करते हैं, यहाँ एक निर्गत (Y) का उत्पादन करने के लिये दो आगत पूँजी (K) तथा श्रम (L) हैं। अर्थात्

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{K}{v_1} = \frac{L}{u_1} \\ \text{तथा} \quad Y &= \frac{K}{v_2} = \frac{L}{u_2} \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

यहाँ हैरोड-डोमर निदर्श द्वारा $K = v_i Y$

$$L = u_i Y$$

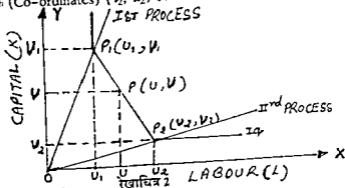
तथा $u_i > O,\ v_i > O$

$(i = 1,2)$

इसको रेखाचित्र की सहायता द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है। रेखाचित्र 2 एक उत्पादन फलन अथवा सम उत्पादन I_g को निर्दिष्ट करता है। यह दो विभिन्न उत्पादन प्रक्रियाओं के बिन्दुओं P_1 तथा P_2 को मिलाता है। यह स्थिर स्तर (मानलो एक इकाई) पर उत्पादन हेतु K तथा L के विभिन्न सयोगों को व्यक्त करता है। उदाहरणार्थ,

यदि केवल प्रक्रिया I का प्रयोग किया जाये तब एक इकाई उत्पादन करने हेतु पूँजी की v_1 इकाइयाँ तथा श्रम की u_1 इकाइयाँ आवश्यक है। अर्थात् बिन्दु P_1 जिसके नियामक (v_1, u_1) हैं। इसी प्रकार यदि केवल प्रक्रिया II का प्रयोग किया जाये तब एक इकाई उत्पादन करने हेतु पूँजी की v_2 इकाइयाँ तथा श्रम की u_2 इकाइयाँ आवश्यक है। अर्थात् बिन्दु P_2 जिसके निर्देशाक (Co-ordinates) (v_2, u_2) हैं।

रेखाचित्र 2

1 रेखीय प्रक्रमन शीर्षक, अध्याय का अवलोकन कीजिए।

यदि अर्थव्यवस्था में दोनों प्रक्रियाओं का प्रयोग किया जाये अर्थात् कुछ फर्म *I* प्रक्रिया तथा कुछ फर्म *II* प्रक्रिया का प्रयोग करें तब एक इकाई उत्पादन पूँजी की v इकाइयों तथा श्रम की u इकाइयों द्वारा प्राप्त होता है। यह सम उत्पाद वक्र पर बिन्दु P द्वारा व्यक्त किया गया है।

मान लो प्राचल λ उत्पादन प्रक्रियाओं के मिश्रण (Mix of production processes) को निम्न प्रकार निर्धारित करता है

$$\left.\begin{aligned} v &= \lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \\ \text{तथा} \quad u &= \lambda u_1 + (2-\lambda) u_2 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

यहाँ $\quad 0 \leq \lambda \leq 1$

अस्तु, इस निदर्श का विशेष लक्षण यह है कि प्राचल λ प्राचल को 0 तथा 1 के मध्य विभिन्न मान प्रदान किये जा सकते है। ये मान दोनों उत्पादन प्रक्रियाओं के मिश्रण के अनुसार प्रदान किये जाते है, ताकि विकास की अभीष्ट तथा स्वाभाविक दरें समान हों। जिस गति से λ, 0 से 1 की ओर अग्रसर होता है, उसी गति से v का मान v_2 से v_1 तक कम होता है तथा g में s/v_2 से s/v_1 (यहाँ s स्थिर है) तक वृद्धि होती है। इस प्रकार अभीष्ट दर के विभिन्न मान $\lambda_1, \lambda_2,$ प्राप्त किये जा सकते है। इन मानों में से हमें विकास की स्वाभाविक दर के बराबर मान का चयन करना है। इस समस्या का अनन्य नियमित स्थिति हल केवल तभी सम्भव है, जबकि

$$\frac{s}{v_2} n \leq \frac{s}{v_1} \tag{34}$$

अत यह समीकरण हैरॉड-डोमर निदर्श (यहाँ $n = \frac{s}{v}$) में महत्त्वपूर्ण सशोधन है।

यदि समीकरण (34) की सन्तुष्टि होती है, अर्थात् इस समीकरण के हल से ($g = n$) प्राप्त होता है, तब नियमित विकास की स्थिति हेतु λ का उपयुक्त मान इस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है

$$n = \frac{s}{v} = \frac{s}{\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2}$$

अथवा $\quad \lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 = \frac{s}{n}$

अथवा $\quad \lambda v_1 + v_2 - \lambda v_2 = \frac{s}{n}$

अथवा $$\lambda (v_1 - v_2) = \frac{s}{n} - v_2$$

$$\lambda = \frac{\frac{s}{n} - v_2}{v_1 - v_2}, 0 < \lambda < 1 \qquad (2\ 35)$$

अस्तु, रेखीय प्रक्रमन निदर्श अनन्य नियमित विकास हल प्रदान करता है, जिसमें दो उत्पादन प्रक्रियाओं का मिश्रण λ $(1 - \lambda)$ अनुपात में किया गया है तथा λ का मान समीकरण (2 35) द्वारा प्रस्तुत किया गया है।

इस निदर्श की मुख्य कमी यह है कि यह उत्पादन प्रक्रियाओं के उपयुक्त मिश्रण को स्थापित करने की विधि प्रस्तुत नहीं करता है। यह उसको वाह्य रूप से स्थापित मानता है।

सोलोकृत विकास निदर्श
(Solow Model of Growth)

सोलोकृत विकास निदर्श को प्रारम्भिक नव प्रतिनिष्ठित निदर्श (Basic Neo Classical Model) भी कहा जाता है। नियमित विकास की समस्या के हल करने हेतु सोलो की प्रणाली इस मान्यता पर आधारित है कि उत्पादन प्रक्रियाओं की संख्या अत्यधिक है। अर्थात् निर्गत-पूँजी अनुपात v में निरन्तर परिवर्तन होता रहता है। इस सन्दर्भ में सोलोकृत निदर्श को रेखीय प्रक्रमन निदर्श (दो उत्पादन प्रक्रियाओं सहित) का सामान्यीकरण कहा जा सकता है। इस अनुपात का एक मान ज्ञात किया जा सकता है, जहाँ कि विकास की अभीष्ट दर $g = \frac{s}{v}$ श्रम-विकास की स्वाभाविक दर के समान हो। वास्तव में, सोलो निदर्श को हैरॉड-डोमर निदर्श द्वारा प्रतिपादित किया जा सकता है, यदि इसकी प्रथम मान्यता को शिथिल किया जाये तथा निदर्श में एक और समीकरण सम्मिलित किया जाये। वस्तु बाजार तथा श्रम बाजार के तीनों सन्तुलन समीकरण अपरिवर्तित रहते हैं। केवल उत्पादन फलन में परिवर्तन होता है। यह निदर्श भी अर्थव्यवस्था में स्थिर प्रतिफल की स्थिति को नहीं मानता है। अत उत्पादन करने हेतु पूँजी तथा श्रम को एक दूसरे के द्वारा प्रतिस्थापित किया जा सकता है। उत्पादन फलन का नवीन समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$Y = f(K)$$

यहाँ $y = \frac{Y}{L}$ निर्गत श्रम अनुपात

तथा $k = \frac{K}{L}$ = पूँजी श्रम अनुपात

जबकि $f'(k) > 0$ Y का प्रथम अवकलज

$f''(K) < 0$ Y का द्वितीय अवकलज $\qquad (2\ 36)$

$f'(k) \to \infty$ यदि $k \to 0$

$f'(k) \to 0$ यदि $k \to \infty$

अब हैरॉड-डोमर निदर्श की प्रथम मान्यता को प्रतिस्थापित करने पर इस निदर्श की मान्यताएँ (सन्तुलन समीकरण) निम्न प्रकार व्यक्त की जा सकती हैं

$$\left.\begin{array}{ll} y = f(K) & \text{पूर्ण क्षमता शर्त} \\ I = \dfrac{dk}{dt} = sY & \text{निवेश बराबर बचत शर्त} \\ L = L_o e^{nt} & \text{पूर्ण रोजगार शर्त} \end{array}\right\} \quad (37)$$

हल :

यहाँ $\quad y = f(K)$

तथा $\quad k = \dfrac{K}{L}$ = प्रति व्यक्ति पूँजी स्टॉक

अथवा $\quad \log k = \log K - \log L$

अथवा $\quad d\log k = d\log K - d\log L$

अथवा $$\frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = \frac{1}{K}\frac{dK}{dt} - \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$$

अथवा $$\frac{1}{K}\frac{dk}{dt} = \frac{1}{K}\frac{dk}{dt} - n \quad \text{यहाँ } \frac{dL}{dt}/L = \frac{L}{L} = n$$

द्वितीय शर्त से $\dfrac{dK}{dt}$ का मान रखने पर, हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = \frac{1}{K}sY - n$$

अथवा $$\frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = v\frac{Y}{L}\frac{L}{K} - n$$

$$= s\frac{y}{k} - n \qquad \text{यहाँ } y = \frac{Y}{L} \text{ तथा } k = \frac{K}{L}$$

$$= \frac{s}{k}f(k) - n \qquad \text{यहाँ } y = (k)$$

अथवा $$\frac{dk}{dt} = sf(k) - n \quad (38)$$

जब सन्तुलन पर k (प्रति व्यक्ति पूँजी) स्थिर (K_0) हो जाती है, अर्थात् k अपनी अधिकतम सीमा तक पहुँच चुका है तथा प्रत्येक t के लिये स्थिर है, ताकि $\dfrac{dk}{dt} = 0$

[मान्यतानुसार भी $f'(k) \to 0$ यदि $k \to \infty$]

अतएव उपर्युक्त समीकरण (38) को निम्न प्रकार लिख सकते है

$$sf(K_o) - nK_o = 0 \qquad \text{यहाँ } \frac{dk_o}{dt} = 0$$

अथवा $$\frac{f(k_o)}{k_o} = \frac{n}{s} \tag{2 39}$$

यह समय के साथ प्रति व्यक्ति पूँजी k का सन्तुलन पथ है।

सामान्यत समीकरण (39) के एक अथवा अधिक मूल (roots) हो सकते हैं। यदि कोई मूल k हो तब $k = k_o$ प्रत्येक t के लिये, निदर्श के सगत एक सन्तुलन पथ है।

यदि प्रति व्यक्ति प्रारम्भिक पूँजी स्टॉक k_o है, तब सन्तुलन पथ इस प्रकार होगा कि प्रत्येक समय के लिये प्रति व्यक्ति पूँजी स्टॉक k स्थिर रहे। अर्थात् श्रम शक्ति में स्वाभाविक वृद्धि प्रति व्यक्ति सन्तुलित पूँजी स्टॉक के सदृश है, जिससे $g = n$ हो सके।

निदर्श के विभिन्न चरों के विकास पथ निम्न प्रकार ज्ञात किये जा सकते हैं

मान्यतानुसार हमें ज्ञात है

$$L = L_o e^{nt}$$

तथा $$\frac{K}{L} = k = k_o$$

$$K = k_o L$$

अथवा $K = K_o L_o e^{nt} \qquad L = L_o e^{nt}$ (1)

पुन: $y = f(k) = f(k_o)$ यहाँ $k = k_o$ (स्थिराक)

अथवा $y_o = f(k_o)$ यहाँ $y = y_o$ जोकि प्रत्येक t के लिये स्थिराक है, क्योंकि $f(k_o)$ स्थिराक है।

अब $$y = y_o = \frac{Y}{L}$$

अथवा $Y = y_o L$

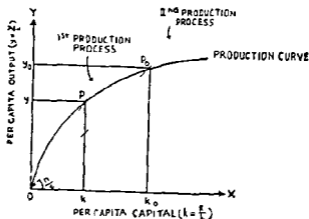
अथवा $Y = y_o L_o e^{nt}$ (ii)

अत चरों के विकास पथ निम्नलिखित है

$$\left.\begin{aligned} Y &= y_o L_o e^{nt} \\ K &= K_o L_o e^{nt} \\ L &= L_o e^{nt} \end{aligned}\right\} \tag{2 40}$$

पर समस्त चरों में ज्ञात दर n से सतुलन पथ पर वृद्धि होती है। यह नियमित विकास पथ अनन्य (unique) होगा, क्योंकि उत्पादन फलन से सुनिश्चित होता है कि t के प्रत्येक मान के लिए समीकरण $\frac{n}{s} = \frac{Y}{K} = \frac{1}{v}$ = स्थिराक को सतुष्ट करने हेतु k_0 का एक और केवल एक ही मान है।

आरेखीय निरूपण (Diagrammatical Representation)

सोलो विकास निदर्श को आरेख द्वारा भी प्रदर्शित किया जा सकता है। रेखा चित्र 3 में उत्पादन वक्र को (X, Y) तल पर प्रदर्शित किया गया है।

रेखाचित्र 3

मान लो उत्पन्न चक्र पर p एक बिन्दु है, जहा उत्पादन प्रक्रिया I (OP) का ढाल निम्नलिखित है

$$\frac{y}{k} = \frac{1}{v} = \text{निर्गत पूँजी अनुपात}$$

ज्ञात स्थिर ढाल $\frac{n}{s}$ के बराबर ढाल वाला एक अर्धव्यास OP_o खीचा, जोकि उत्पादन वक्र को बिन्दु P_o पर काटता है। P_o नियमाक (k_o, y_o) हैं। तब प्रक्रिया II (OP_o) का ढाल निम्न प्रकार है

$$\frac{y_o}{k_o} = \frac{f(k_o)}{k_o} = \frac{n}{s} = \text{स्थिराक}$$

अब यह सिद्ध किया जा सकता है कि प्रथम मान्यता के अनुसार k में शून्य से अनन्त तक वृद्धि के फलस्वरूप उत्पादन प्रक्रिया OP का ढाल निरन्तर घटता है। अत उत्पादन वक्र पर केवल एक बिन्दु OP_0 ही एक ऐसा बिन्दु है जहाँ k_0 का मान इस प्रकार निर्धारित होता है, ताकि यह मान समीकरण $\frac{f(k_0)}{k_0} = \frac{n}{s}$ का अनन्य मूल हो।

कालडोर विकास निदर्श

(Kaldor Model of Growth)

इस निदर्श की व्याख्या कीन्स के मौलिक निदर्श (Basic Keynesian Model) के सदर्भ में भी की जा सकती है। अर्थात् आय-वितरण का निर्धारण व्यापार में लिये गये निवेश सम्बन्धी निर्णयों में सहायक है। सकेत रूप में,

$W = Y - P$ अथवा $Y = W + P$

यहाँ Y = आय W = श्रम तथा P = लाभ

कालडोर ने इस मान्यता का परित्याग किया है कि बचत की सीमान्त प्रवृत्ति (s) स्थिर है (जैसा कि हैरॉड -डोमर तथा सोलो निदर्श में मान लिया जाता है)। इन्होंने बचत की सीमात प्रवृत्ति को परिवर्तनशील माना है, जोकि श्रम (W) तथा लाभ (P) के मध्य आय के वितरण के अनुसार है। अर्थात्,

तथा
$$\left.\begin{array}{l} s = s_w + s_p \\ 0 \leq s_w < s_p \leq 1 \end{array}\right\} \quad (2\ 41)$$

यहाँ s_w = श्रमिकों की बचत दर

s_p = लाभ प्राप्त करने वालों की बचत

कालडोर की यह भी मान्यता है कि श्रमिक पूँजीपतियों के कुल उत्पादन का एक स्थिर अनुपात में उपयोग करते हैं।

इसके अतिरिक्त कालडोर का कथन है कि यह निदर्श उस अर्थव्यवस्था को स्वीकार करता है, जिसमें लाभ तथा आय उत्पन्न करने की कार्यप्रणाली द्वारा पर्याप्त बचत की जा सके ताकि उद्यमी द्वारा निर्धारित निवेश सन्तुलित अवस्था में विद्यमान रहे।[1]

---

1 "The model is one of an economy in which the mechanism of profit and income generation will creat sufficient savings ... to balance the investment which entrepreneurs decide to undertake " N Kaldor and J.A. Mirrlees *A New Model of Economic growth Review of Economic Studies*

अम्तु, $I = S = sY$

अथवा $sY = S$

अथवा $sY = s_w W + s_p P$

अथवा

$$s\ s_w \frac{W}{Y} + s_p \frac{P}{Y}$$

$$= s_w \frac{(Y-P)}{Y} + s_p \frac{P}{Y}$$

$$= s_w - s_w \frac{P}{Y} + s_p \frac{P}{Y}$$

$$= s_w - (s_p - s_w) \frac{P}{Y} \qquad (2\ 42)$$

ममीकरण (2 42) व्यक्त करता है कि कालडार निदर्श का बचत फलन आय-वितरण पर निर्भर करता है। आय-वितरण को वाह्यरूप से ज्ञात मान लिया गया है। इस निदर्श की अन्य मान्यताएँ हैरॉड-डोमर निदर्श के समान है

(i) उत्पादन में स्थिर गुणाक है। अर्थात् $K = vY$ एव $L = uY$

(ii) तकनीकी प्रगति नहीं होती है। अर्थात् $\frac{dK}{dt} = sY = S = I$

(iii) श्रम शक्ति में ज्ञात दर n से वृद्धि हो रही है। अर्थात् $L = uY = L_o e^{nt}$

तकनीकी रूप में इस निदर्श की मान्यताओं को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$K = vY$ पूर्ण क्षमता शर्त

$I = \frac{dK}{dt} = sY$ निवेश = बचत शर्त (2 43)

$L = uY = L_o e^{nt}$ पूर्ण रोजगार शर्त

यहाँ $s = s_w + (s_p - s_w) \frac{P}{Y}$

Y = आय अथवा उत्पादन, K = पूँजी, v = उत्पादन फलन का गुणाक, s = बचत की प्रवृत्ति, dK = K का अवकलज, L = वर्तमान श्रम, L_o = प्रारम्भिक श्रम, u = गुणाक।

हल : उपर्युक्त तीनों सन्तुलन समीकरण अथवा शर्त अथवा मान्यताएँ अनन्य नियमित विकास हल उत्पन्न करती हैं, जबकि निदर्श के समस्त चर Y, K तथा L की विकास दर n के बराबर हों। यह तब ही पूर्ण होगी जबकि विकास की अभीष्ट दर ($g = s/v$) श्रम विकास

की स्वाभाविक दर (n) के बराबर हो। हैरॉड-डोमर निदर्श तथा कालडोर निदर्श में मुख्य अन्तर यह है कि यहाँ s स्थिराक नहीं है, अपितु यह प्राचल π पर निर्भर करता है। $\pi = P/K$ लाभ की दर है अथवा पूँजी स्टॉक (K) पर प्राप्त होने वाली प्रतिफल की दर है।

अब हमें π का ऐसा मान ज्ञात करना है जो कि समीकरण

$$\frac{s}{v} = n \tag{2 44}$$

को सन्तुष्ट करता हो

समीकरण (2 44) को प्राचल π के पदों में लिखने पर

$$\frac{s}{v} - n$$

अथवा
$$\frac{1}{v}\; s_w + (s_p - s_w)\frac{P}{Y} = n$$

अथवा
$$n = \frac{1}{v}\; s_w + (s_p - s_w)\frac{P}{Y}$$

अथवा
$$n = \frac{1}{v}[s_w + (s_p - s_w)\pi V], \quad \text{यहाँ } \pi = P/K$$

$$\text{तथा } v = \frac{K}{Y}$$

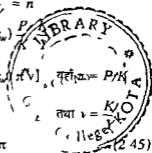
अथवा
$$n = \frac{s_w}{v} + (s_p - s_w)\pi \tag{2 45}$$

समीकरण (2 45) द्वारा स्पष्ट है कि,

$$n = f\left(\frac{s_w}{v}, s_p\, \pi\right)$$

अर्थात् n तीन चरों $\frac{s_w}{v}$, s_p तथा π का फलन है। इस प्रकार कालडोर निदर्श में एक नवीन चर π का समावेश हो गया है। π का समावेश कालडोर की एक महत्त्वपूर्ण उपलब्धि है।

यहाँ π एक स्वतन्त्र चर है जोकि विभिन्न मान π_1, π_2 ले सकता है तथा हमें π के उस मान का चयन करना है जोकि नियमित विकास हेतु सतुलन शर्त को पूर्ण करता है। अर्थात् $s/v = n$

लाभ दर π पर यह प्रतिबन्ध है कि लाभ आय से अधिक नहीं हो सकता, क्योंकि मजदूरी ऋणात्मक नहीं हो सकती है तथा $X = Y - W$। अस्तु

$P \ngtr Y$ अथवा $P \leq Y$

अथवा $P \leq \frac{K}{v}$ ($K = vY$)

अथवा $\frac{P}{K} \leq \frac{1}{v}$

अथवा $\pi \leq \frac{1}{v}$ ($\pi = \frac{P}{K}$)

अर्थात् $0 \leq \pi \leq \frac{1}{v}$

इस प्रकार π की निम्न सीमा 0 तथा उच्च सीमा $\frac{1}{v}$ है।

समीकरण (2 45) में π की दोनों सीमाओं का मान रखने पर हमें n की निम्न तथा उच्च सीमा इस प्रकार प्राप्त होती है

$$n = \frac{s_w}{v} + (s_p - s_w)\,\pi$$

$\pi = 0$ रखने पर

$$n = \frac{s_w}{v}$$ (i) n की निम्न सीमा

$\pi = \frac{1}{v}$ लिखने पर

$$n = \frac{s_w}{v} + (s_p - s_w)\frac{1}{v}$$

$$= \frac{s_p}{v}$$ (ii) n की उच्च सीमा

अतएव (i) तथा (ii) से

$$\frac{s_w}{v} \leq n \leq \frac{s_p}{v} \qquad (2\ 46)$$

समीकरण (2 46) कालडोर निदर्श का महत्वपूर्ण निष्कर्ष है। स्मरणीय है कि हैरोड-डोमर निदर्श के अनुसार $n = \frac{s}{v}$ लिया जाता है। जबकि कालडोर निदर्श में n का मान s_w/v तथा s_p/v के मध्य कहीं भी हो सकता है।

यदि समीकरण (2 46) लागू होता है, तब हम π का अनन्य मान ज्ञात कर सकते है, ताकि नियमित विकास की स्थिति बने रहे

$$n = \frac{s_w}{v} + (s_p - s_w)\,\pi$$

अथवा
$$\pi = \frac{n - s_w/v}{s_p - s_w}$$

n का मान निम्नतर मान $\frac{s_w}{v}$ रखने पर,

$$n = \frac{s_w/v - s_w/v}{s_p - s_w} = 0$$

इसी प्रकार, n का उच्चतर मान $\frac{s_p}{v}$ रखने पर,

$$\pi = \frac{s_p/v - s_w/v}{s_p - s_w} = \frac{1}{v} \qquad (2\ 47)$$

अतएव, इस निदर्श का आधारभूत समीकरण निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\pi = \frac{n - s_w/v}{s_p - s_w}$$

यहाँ
$$0 \leq \pi \leq \frac{1}{v} \qquad (2\ 48)$$

एक विशेष स्थिति (One Particular Case of Interest)

यदि सम्पूर्ण लाभ को बचत के रूप में लिया जाये, तब $\pi = n$ अर्थात् लाभ की दर विकास की स्वाभाविक दर के बराबर है। यदि बचत का s_p भाग लाभ द्वारा प्राप्त होता है, तब लाभ की दर श्रम-विकास की स्वाभाविक दर का $\left(\frac{1}{s_p} \geq 1\right)$ गुणा होती है। अर्थात् $\pi = \frac{n}{s_p}$ यहाँ विकास की अभीष्ट दर (g) विकास की स्वाभाविक दर के बराबर होती है। संकेत रूप में,

यदि $\quad S = s_p \qquad 0 \leq s_p \leq 1$

तथा $\quad 0 \leq n \leq \frac{s_p}{v}$

तब, $g = \frac{S}{v} = \frac{Y}{K} s_p \frac{P}{Y} = s_p \frac{P}{K} = n \qquad v = \frac{K}{Y}$ तथा $n = \frac{S}{v}$

कालडोर निदर्श की आल ~ ~ (Criticism of Kaldor Model)

(i) इस निदर्श ... आलोचना यह है कि यह आय-वितरण को ज्ञात मानता है। आय-... को वाह्य रूप से निर्धारित किया हुआ माना जाता है।

(ii) इस निदर्श के अनुसार, नियमित विकास की दो सीमाओं के मध्य लाभ की दर अनन्य (Unique) है, परन्तु यह निदर्श इस बात को स्पष्ट करने में विफल हो जाता है कि इस अनन्य मान को किस प्रकार प्राप्त किया जाये।

(iii) यह निदर्श रेखीय प्रक्रमन निदर्श के समान है। इन दोनों निदर्शों के अन्तर्गत एक प्राचल को वाह्य शर्तों के अनुसार स्थिर रखा जाता है, ताकि नियमित विकास की स्थिति रहे। रेखीय प्रक्रमन निदर्श में स्थिर प्राचल तकनीकी गुणाक ι है तथा कालडोर निदर्श में यह प्राचल π है जो कि स्थिर रखा जाता है अथवा नियमित विकास हेतु इसका चयन किया जाता है। इस सन्दर्भ मे ही दोनो को समान कहा गया है।

(iv) इस निदर्श को आय-वितरण सिद्धान्त द्वारा पूर्ण किया जाता है, जिसको यह दिया हुआ (Given) मानता है।

श्रीमती जॉन रोबिन्सन विकास निदर्श
(Mrs Joan Robinson's Growth Model)

जैसा कि हम अध्ययन वर चुके है कि आधुनिक अर्थशास्त्रियों ने आर्थिक विकास के प्रतिष्ठित विचारो (Classical ideas) (जनसख्या, बचत तथा प्रौद्योगिकी आदि के सम्बन्ध में) को विकास निदर्शों के रूप में प्रस्तुत किया है। इसमें उन्होंने कीन्स तथा हैरोड-डोमर पारिभाषिक शब्दावली (Terminology) का प्रयोग किया है। इन निदर्शों को नव-प्रतिष्ठित विकास निदर्श (Neo-classical growth model) कहा जाता है। इसी प्रकार का एक विकास निदर्श श्रीमती जॉन रोबिन्सन ने 1956 मे प्रकाशित अपनी पुस्तक *The Accumulation of Capital* में विकसित किया है, जोकि उनके नाम से ज्ञातव्य है।

निदर्श की मान्यताएँ (Assumptions of the Model)

श्रीमती जॉन रोबिन्सन विकास निदर्श की मान्यताएँ निम्नलिखित हैं:

(i) बन्द अर्थव्यवस्था के अन्तर्गत पूँजी एव श्रम केवल दो उत्पादन के साधन है।

(ii) उत्पादन करने हेतु पूँजी तथा श्रम स्थिर अनुपात में सयुक्त हैं।

(iii) उत्पादन- प्रौद्योगिकी अपरिवर्तित (अथवा स्थिर) रहती है।

(iv) अर्थव्यवस्था की समस्त आय (Y) श्रमिकों (Wage earners) तथा उद्यमियों (लाभ-प्राप्त कर्ता) के मध्य विभाजित है।

(v) श्रमिक अपनी समस्त आय का उपभोग कर लेते है (अर्थात श्रमिक बचत नहीं करते) परन्तु इसके विपरीत लाभ प्राप्तकर्त्ता अपनी समस्त आय (लाभ) को निवेश में अथवा पूँजी निर्माण में व्यय करते है तथा उसका उपभोग बिल्कुल नहीं करते हैं। समीकरण रूप में,

समस्त आय, $Y - wL + \pi K$

यहाँ Y = समस्त आय (उत्पादन)

w = वास्तविक मजदूरी-दर

L = श्रम, π = लाभ-दर तथा K = पूँजी

श्रीमती रोबिन्सन के अनुसार– पूँजी निर्माण सिद्धान्त में लाभ की दर π महत्त्वपूर्ण कारक है। लाभ की दर को हम समीकरण (2 49) द्वारा ज्ञात कर सकते है

$$\pi \frac{Y - wL}{K} \qquad (2\ 49)$$

समीकरण (2 49) व्यक्त करता है कि लाभ की दर को समस्त आय, श्रम, समस्त मजदूरी तथा पूँजी की मात्रा के अनुपात मे प्रदर्शित किया जा सकता है। अर्थात् प्रति श्रमिक लाभ अथवा प्रति व्यक्ति लाभ, प्रति श्रमिक निर्गत तथा वास्तविक मजदूरी के अन्तर के बराबर है। अस्तु,

$$\pi = \frac{Y - wL}{K}$$

अथवा $$\pi = \frac{Y/L}{K/L} - w\frac{L}{K}$$

अथवा $$\pi = \frac{y}{k} - \frac{w}{k}$$

अथवा $$\pi = \frac{1}{k}(y - w)$$

अथवा $$K\pi = (y - w) \qquad (2\ 50)$$

यहाँ $y = \frac{Y}{L}$ प्रति व्यक्ति निर्गत (अथवा उत्पादन)

$k = \frac{K}{L}$ प्रति व्यक्ति पूँजी

अथवा $$\pi = f(k, y, w) \qquad (2\ 51)$$

जहाँ $y = f(k)$

अर्थात् लाभ की दर श्रम-उत्पादकता (y) वास्तविक मजदूरी दर (w) तथा प्रति श्रमिक पूँजी की मात्रा (k) पर निर्भर कर सकती है अस्तु, लाभ में वृद्धि की जा सकती है, यदि मज्दूरी-दर (w) में कमी होती हो अथवा y के मान में वृद्धि अथवा पूँजी श्रम अनुपात में कमी होती हो, जबकि साथ ही अन्य चरों को स्थिर रखा गया हो।

पुन समस्त आय (= व्यय) को उपभोग तथा बचत दो भागों में विभाजित किया जाता है। अर्थात्

$$Y = C + I$$

तथा $$I = S$$

मान्यताओं के अनुसार, चूंकि श्रमिक अपनी आय को उपभोग पर व्यय करते हैं, अत उपभोग व्यय (C) समस्त मजदूरी आय (W) के बराबर है। इसी प्रकार चूँकि उद्यमी अपना समस्त लाभ निवेश पर व्यय करते हैं. अत. दी हुई समयावधि $\frac{dk}{dt} = I$ में कुल पूँजी स्टॉक में वृद्धि पूँजी गुणा लाभ की दर के बराबर है। गणितीय रूप में, सन्तुलन शर्त निम्न प्रकार है:

$$I = S = sY$$

तथा $$I = \frac{dk}{dt} = K\pi$$

अथवा $$sY = K\pi$$

अथवा $$\frac{K}{Y} = \frac{s}{\pi}$$

अथवा $$v = \frac{s}{\pi} \qquad \text{यहाँ } v = \frac{K}{Y} \text{ (पूँजी-निर्गत अनुपात)}$$

अथवा $$\pi = \frac{s}{v} = n \qquad \ldots(2\ 52)$$

यहाँ $\frac{s}{v} = n$ = विकास की स्वाभाविक दर

समीकरण (2.52) इस निदर्श का आधारभूत समीकरण है। इस समीकरण द्वारा स्पष्ट है कि यदि पूँजी निर्गत अनुपात उच्च होगा तब लाभ की दर न्यून होगी।

लाभ की दर न्यून होने के फलस्वरूप पूँजी की पूर्ति पर विपरीत प्रभाव पड़ेगा (उद्यमियों द्वारा बचत को निवेशित करने के कारण) तथा इस प्रकार श्रम पूर्ति (L) तथा पूँजी (K) के अन्तर में वृद्धि होती जायेगी। श्रम पूर्ति में वृद्धि, पूँजी पूर्ति में आनुपातिक वृद्धि नहीं

होने के परिणामस्वरूप अर्थव्यवस्था में बेरोजगारी में वृद्धि हो जायेगी। इस प्रकार श्रीमती रोबिन्सन के कथनानुसार, अर्थव्यवस्था में पूर्ण रोजगार की स्थिति बनाये रखने हेतु पूँजी विकास की अभीष्ट दर $g = \frac{s}{v}$ श्रम विकास की स्वाभाविक दर (n) के बराबर होनी चाहिए। अर्थात्

$$g = r = \frac{s}{v} = n \qquad (2.53)$$

श्रीमती रोबिन्सन ने इस स्थिति को 'स्वर्ण-काल' (Golden Age)[1] की संज्ञा प्रदान की है, जोकि नियमित विकास का अनन्त काल है, जबकि समस्त लाभ बचत में परिवर्तित हो जाता है।

कभी-कभी अर्थव्यवस्था में असंतुलन स्वर्ण-काल को अपने पथ से विचलित कर देता है परन्तु निश्चित शर्तों की पूर्ति द्वारा इसका पुनः स्वपथ पर वापिस आना सम्भावित है। उदाहरणार्थ,

यदि $n > g = r = \frac{s}{v}$, तब श्रम की अतिरिक्त पूर्ति के कारण मुद्रा-मजदूरी की दर (मूल्यों को स्थिर मानते हुए) तथा साथ ही वास्तविक मजदूरी की दर कम होगी। अतः इसके परिणामस्वरूप लाभ की मात्रा में वृद्धि होगी (तथा इसलिए लाभ दर r में वृद्धि होगी) जिसके फलस्वरूप $g = \frac{s}{v}$ में वृद्धि होगी। अब दोनों पुनः समान हो जायेंगी तथा अर्थ व्यवस्था पुनः स्वर्ण-काल की अवस्था प्राप्त करेगी।

इसके विपरीत यदि $n < g$ अथवा $g > n$ तब स्वर्ण-काल के संतुलन को पुनः प्राप्त करने हेतु प्रौद्योगिकी में सुधार करने पड़ेंगे, जिसके फलस्वरूप पूँजी निर्गत अनुपात उच्चतर होगा तथा इससे लाभ की दर r एवं विकास की अभीष्ट दर में कमी होगी। इस प्रकार g तथा n पुनः बराबर हो जायेंगी।

श्रीमती रोबिन्सन के निदर्श का मुख्य योगदान यह है कि इन्होंने प्रतिष्ठित मूल्य तथा वितरण सिद्धान्त (विशेषतः रिकार्डो तथा मार्क्स का) को कीन्स के बचत निवेश सिद्धान्त के साथ संघटित किया है। अतः यह सोलो एवं काल्डोर के विकास निदर्शों पर अतिरिक्त और संशोधन है।

इस निदर्श की आलोचनाएँ इसकी मान्यताओं पर आधारित हैं।

1 Smt. Joan Robinson *The Accumulation of Capital*, 1956

मीडे का विकास निदर्श
(Meade's Growth Model)

सामान्य नव-प्रतिष्ठित निदर्श (A General Neo-classical Model)

प्रो जे ई मीडे (Prof J E Meade) ने अपने विकास निदर्श में चार उत्पादन साधन पूँजी, श्रम, प्राकृतिक साधन तथा प्रौद्योगिकी का अध्ययन किया है। यह निदर्श भी श्रीमती रोबिन्सन के निदर्श के समान ही है, परन्तु दोनों में अन्तर यह है कि श्रीमती रोबिन्सन ने 2 उत्पादन साधनों का अध्ययन किया है।

निदर्श की मान्यताएँ (Assumptions of the Model)

(i) अर्थव्यवस्था के अन्तर्गत मूल्य स्तर अपरिवर्तित रहता है।

(ii) अर्थव्यवस्था के अन्तर्गत वर्द्धमान प्रतिफल का नियम प्रभावी नहीं है।

(iii) उत्पादन साधनों की उत्पादकता स्थिर है।

(iv) अर्थव्यवस्था के अन्तर्गत पूर्ण रोजगार की स्थिति विद्यमान है।

(v) अर्थव्यवस्था के दोनों बाजारों– वस्तु बाजार तथा श्रम बाजार– में पूर्ण प्रतियोगिता विद्यमान है।

इस निदर्श के अनुसार शुद्ध उत्पादन (आय) 'Y' निम्नांकित चार मुख्य साधनों पर निर्भर करता है

(a) पूँजी का शुद्ध स्टॉक (K) उत्पादन के उपकरणों के रूप में, जैसे– मशीन आदि।

(b) श्रम-शक्ति (L)

(c) प्राकृतिक साधन भूमि सहित (N)

(d) तकनीकी ज्ञान (T)

अतएव उत्पादन फलन निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$Y = f(K, L, N, T) \qquad (2\ 54)$$

पुन इस निदर्श की मान्यता यह है कि समाज को प्राप्य भूमि तथा प्राकृतिक साधन (N) स्थिर है, अर्थात् समय के साथ N में कोई परिवर्तन नहीं होता है। अतएव किसी भी समय पर उत्पादन स्तर (आय) K, L तथा T में हुए परिवर्तनों पर निर्भर करता है। इसके अतिरिक्त समय-समय पर प्रौद्योगिक सुधारों के परिणामस्वरूप तकनीकी ज्ञान (T) भी स्थिर नहीं रह पाता। जिसके फलस्वरूप उत्पादन में वृद्धि होती है। अस्तु, मीडे विकास निदर्श सतत (Continuous) उत्पादन फलन माना जाता है, जिसमें किसी ज्ञात दर से समूहोन्मुक्त

(Disembodied) तकनीकी प्रगति होती रहती है। तकनीकी प्रगति के फलस्वरूप वार्षिक उत्पादन की दर में वृद्धि को प्रदर्शित करने हेतु गुणाक m (तकनीकी प्रगति की दर) का उपयोग किया जा सकता है। इस प्रकार नियमित विकास की स्थिति में पूँजी-जमाव हेतु विस्तृत शक्ति (n) तथा तकनीकी प्रगति (m) दोनों सहायक है। सकेत के रूप में, विकास की सयुक्त स्वाभाविक दर (m) को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं

$M = m + n$

यदि $m = 0$, तब विकास तकनीकी प्रगति की अनुपस्थिति में भी होगा।

तथा यदि $n = 0$, तब विकास श्रम शक्ति को स्थिर मानकर होगा।

अत अब नवीन उत्पादन फलन निम्न प्रकार है

$$Y = f(K, L) \qquad (2\ 55)$$

यहाँ $\bar{L} = e_{mt} L$ दक्षता इकाई में मापी गई श्रम शक्ति है।

यहाँ दक्षता इकाई का तात्पर्य यह है कि तकनीकी प्रगति के फलस्वरूप श्रम की उत्पादकता में वृद्धि होगी। सतुलन की तीन (पूर्व) शर्तें निम्न प्रकार है

$$\left.\begin{aligned} &Y = f(K, \bar{L}) && \rightarrow \text{पूर्ण क्षमता शर्त} \\ &I = \frac{dK}{dt} = sY && \rightarrow \text{निवेश के बराबर बचत शर्त} \\ &L = L_o e^{nt} && \rightarrow \text{पूर्ण रोजगार शर्त} \end{aligned}\right\} \qquad (2\ 56)$$

समीकरण (2 56) निदर्श की मान्यताएँ है।

हल– सतुलन शर्त के प्रथम समीकरण द्वारा प्राप्त होता है,

$$\bar{L} = e^{mt} L$$

दोनों ओर लघु (log) लेने पर,

$$\log \bar{L} = m \log e^t + \log L = mt + \log L$$

अथवा $\frac{1}{\bar{L}}\frac{d\bar{L}}{dt} = m + \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$

अथवा $\frac{1}{\bar{L}}\frac{d\bar{L}}{dt} = m + \frac{\dot{L}}{L}$ यहाँ $\dot{L} = \frac{dL}{dt}$

अथवा $\frac{1}{\bar{L}}\frac{d\bar{L}}{dt} = m + n = M$ यहाँ $n = \frac{\dot{L}}{L}$

अर्थात् मान्यतानुसार, $\bar{L} = L_o e^{Mt}$ (2 57)

अब सतुलन की द्वितीय शर्त के अनुसार,

$$\frac{dK}{dt} = sY$$
$$= sf(K, \bar{L})$$
$$= sf(K, L_o e^{Mt}) \qquad (2\ 58)$$
$$\bar{L} = L_o e^{Mt}$$

यदि प्रारम्भिक पूँजी-स्टॉक k_o (निदर्श की मान्यतानुसार पूर्ण रोजगार की स्थिति विद्यमान है) तथा सगत प्रारम्भिक उत्पादन $Y_o = f(C_o, L_o)$ ज्ञात हो तब हम समीकरण (2 58) को हल करके K का सतुलन पथ ज्ञात कर सकते हैं। Y का सतुलन पथ $Y= f(K, L_o e^{Mt})$ द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। अत यह स्पष्ट है कि जब श्रम- विकास की स्वाभाविक दर (दक्षता इकाइयों में) M है, तब अर्थव्यवस्था में पूर्ण रोजगार को विद्यमान रखने हेतु चरों K तथा Y में भी M दर से वृद्धि होनी चाहिये। अस्तु,

$$K=K_o e^{Mt}$$

तथा
$$\left.\begin{aligned} &\frac{dK}{dt} = MK_o e^{Mt} \\ &Y = f(K_o e^{Mt}, L_o e^{Mt}) \end{aligned}\right\} \qquad (2\ 59)$$

(2 58) में इन मानों को रखने पर,

$$\frac{dK}{dt} = sf(K_o, L e^{Mt})$$

अथवा
$$MK_o e^{Mt} = sf(K e^{Mt}, L_o e^{Mt})$$

अथवा
$$fK_o e^{Mt}, L_o e^{Mt} = \frac{M}{s} K_o e^{Mt} \qquad (2\ 60)$$

समीकरण (2 60) ही नियमित विकास की स्थिति का वाछित हल है। अब, जैसा कि हमें ज्ञात है, यदि फलन f रैखीय तथा समघातीय हो तब,

$$f(\lambda Y, \lambda L) = \lambda f(K, L), \text{ प्रत्येक } \lambda > 0$$

यहाँ $\lambda = e^{Mt}$, $K = K_o$ तथा $L = L_o$ रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$F(K_o e^{Mt}, L_o e^{Mt}) = e^{Mt} f(K_o, L_o)$$
$$= Y_o et \qquad (2\ 61)$$

यहाँ $$Y_o = f(K_o, L_o)$$

अब समीकरण (2 61) समीकरण (2 60) के समान है,

अर्थात् $$Y_o e^{MtA} = \frac{M}{s} K_o e^{Mt}$$

अथवा $$\frac{K_o}{Y_o} = \frac{s}{M} = \text{पूँजी निर्गत अनुपात}$$

अत नियमित-विकास हेतु पर्याप्त शर्त यह है कि स्थिर प्रतिफल की स्थिति विद्यमान है तथा प्रारम्भिक पूँजी-निर्गत अनुपात निम्न प्रकार है

अथवा $$\frac{s}{M} = \frac{K_o}{Y_o} = v_o$$

नियमित विकास की अवस्था के अन्तर्गत पूँजी (K) तथा श्रम (L) दोनों में $M = m + n$ की दर से वृद्धि होती है। चूँकि $Y = f(K, L)$ रेखीय तथा समघातीय फलन है। अतएव, Y में भी उसी दर (M) से वृद्धि होनी चाहिये। अस्तु, मीड-निदर्श का मुख्य निष्कर्ष यह है कि प्रत्येक t के लिये निर्गत-पूँजी अनुपात $(1/v)$ स्थिर हैं, अर्थात्,

$$\frac{1}{v} = \frac{Y}{K} = \frac{M}{s}, \qquad \text{प्रत्येक } t \text{ हेतु}$$

यह भी निष्कर्ष हैरोड-डोमर निदर्श द्वारा प्राप्त होता है, इसमें विकास की अभीष्ट दर $(g = s/v)$ विकास की स्वाभाविक दर (अब $M = M + n$) के बराबर है। इन दोनों निदर्शों में अन्तर यह है कि हैरोड-डोमर निदर्श में गुणाक का केवल एक स्थिर मान है, जबकि मीड निदर्श में $1/v$ के मानों का सतत परिसर है, जिसमें से हम उस मान का चयन करते हैं, जोकि M/s के बराबर है तथा नियमित विकास की स्थिति की पूर्ति करता है। तत्पश्चात् उसको स्थिर मान लेना चाहिये।

अन्य नव-प्रतिष्ठित निदर्शों की अपेक्षा मीड निदर्श को महत्वपूर्ण मानने का कारण यह है कि इसके अन्तर्गत राष्ट्रीय आय की वृद्धि दर पर जनसख्या वृद्धि, पूँजी सचय तथा तकनीकी प्रगति का प्रभाव सम्मिलित है। परन्तु इस निदर्श की आलोचना भी की जाती है। इस निदर्श की कुछ अवास्तविक मान्यताओं जैसे, पूर्ण प्रतियोगिता, पैमाने के स्थिर प्रतिफल तथा स्थिर कीमत स्तर आदि की आलोचना की गई है।

विकास निदर्शों की विकासगत देशों के लिए उपयोगिता
(Suitability of the Growth Models for Under-Developed Countries)

उन्नत अर्थ व्यवस्थाओं के अन्तर्गत प्रतिपादित विकास सिद्धान्त उन परिवर्तनों पर आधारित है, जोकि पूँजीवादी व्यवस्था के सरल सचालन हेतु आवश्यक है। अर्थात् इन निदर्शों

की रचना अर्थव्यवस्थाओं की व्याख्या हेतु की गई है। अतएव विकासरत देशों के विकास की प्रक्रिया की व्याख्या हेतु इनकी उपयोगिता अत्यधिक कम हो जाती है।

इसका कारण यह है कि इन निदर्शों की मान्यताएँ विकासरत देशों पर लागू नहीं होती है। उदाहरणार्थ–

सरकारी हस्तक्षेप तथा सहयोग की अस्वीकृति, बचत तथा निवेश को बराबर मानना, पूँजी निर्गत अनुपात तथा बचत-आय अनुपात को स्थिर मानना, अल्पावधि में पूर्ण रोजगार की स्थिति का विद्यमान होना, समय विलम्बता का न होना आदि मान्यताएँ विकासरत देशों के सदर्भ में सत्य नहीं हो सकती है।

इसके अतिरिक्त विकासशील देशों के समक्ष आर्थिक स्थिरता की समस्या होती है, जबकि विकासरत देशो की प्रारम्भिक समस्या उनकी विकास प्रक्रिया का आरम्भ करना होती है। पुनश्च , यह मान्यता कि विकासरत देशों का विदेश व्यापार उनके आर्थिक विकास को प्रभावित नहीं करता है, निदर्शों को और भी सीमित तथा सक्षिप्त कर देता है।

अतएव विकासरत देशों हेतु 'अल्प प्रयुक्त ' विकास सिद्धान्त (Under utilised growth theory) का उपयोग किया गया है। कुछ निश्चित विकास दरो तथा निश्चित जनसख्या प्रतिरूपों के आधार पर पचवर्षीय योजनाओं का समावेश किया गया है। इस प्रकार, विकासरत देशों में विकास योजनाओं के अन्तर्गत बचत-आय अनुपात तथा पूँजी-निर्गत अनुपात को स्थिर माना जाता है तथा विकास निदर्शों का उपयोग किया जा सकता है।

3

द्वि-क्षेत्रीय विकास निदर्श (Two-Sector Growth Models)

द्विक्षेत्रीय (नव प्रतिष्ठित) विकास निदर्श को प्रो. जे.आर. हिक्स (J.R. Hicks) ने अनेक चरणों (Stages) में विकसित किया। अतः इस निदर्श को बहुचरण द्विक्षेत्रीय निदर्श (Multistage Two-Sector Model) भी कहते हैं। इस अध्याय में अर्थव्यवस्था के अन्तर्गत दो उत्पादन क्षेत्र तथा एक ज्ञात प्रौद्योगिकी का अध्ययन किया जायेगा। अर्थव्यवस्था के प्रथम क्षेत्र में पूँजीगत वस्तुओं (यंत्र आदि) का उत्पादन दो आगतों श्रम तथा पूँजी द्वारा होता है। द्वितीय क्षेत्र में इन दोनों आगतों का उपयोग करके उपभोग-वस्तुओं का उत्पादन किया जाता है। यह मान लिया जाता है कि वस्तुओं में मूल्य ह्रास नहीं होता है तथा प्रौद्योगिकी पैमाने के स्थिर प्रतिफल की स्थिति में है। अर्थात् उत्पादन के गुणांकों को प्रत्येक क्षेत्र में पृथक् रूप से स्थिर माना जाता है। इस निदर्श में निम्नलिखित संकेतों का प्रयोग किया गया है

Q_1 = प्रथम क्षेत्र द्वारा पूँजीगत वस्तुओं (मशीन) का उत्पादन
Q_2 = द्वितीय क्षेत्र द्वारा उपभोग वस्तु (गेहूँ) का उत्पादन
K_1 = प्रथम क्षेत्र में पूँजी आगत
K_2 = द्वितीय क्षेत्र में पूँजी आगत
L_1 = प्रथम क्षेत्र में श्रम आगत
L_2 = द्वितीय क्षेत्र में श्रम आगत
p = गेहूँ (उपभोग वस्तु) के रूप में मशीनों (पूँजीगत वस्तुओं) की कीमत
w = गेहूँ (उपभोग वस्तु) के रूप में श्रम-दर
π = मशीन (पूँजीगत वस्तुओं) के रूप में लाभ दर
W/P = श्रम दर, मशीनों के पदों में
$d\pi$ = गेहूँ के पदों में मशीनों का अर्द्ध लगान *(Quasi rent)*

---

1 JR. Hicks *Capital & Growth, (1965)* Chapter 12. Prof Hicks takes the example of 'corn' as the consumption good and 'tractors' as capital goods produced by two different sectors

इस निदर्श की रचना निम्नलिखित चार चरणों में की जा सकती है

(i) प्रथम चरण कीमत समीकरण
(ii) द्वितीय चरण मात्रा समीकरण
(iii) तृतीय चरण निवेश वितरण व्यवहार
(iv) चतुर्थ चरण हैरॉड-डोमर निदर्श का व्युत्पादन।

प्रथम चरण (कीमत समीकरण)
(First Stage Price Equations)

यहाँ निम्नलिखित उत्पादन फलनों के समीकरण स्थापित किये जाते हैं

$$Q_1 = \frac{K_1}{v} = \frac{L_1}{u_1}$$

$$Q_2 = \frac{K_2}{v_2} = \frac{L_2}{u_2} \qquad (3\ 1)$$

यहाँ v_1 = प्रथम क्षेत्र में पूँजी-निर्गत अनुपात
v_2 = द्वितीय क्षेत्र में पूँजी-निर्गत अनुपात
u_1 = प्रथम क्षेत्र में श्रम-निर्गत अनुपात
u_2 = द्वितीय क्षेत्र में श्रम-निर्गत अनुपात

गुणांक v_1, v_2, u_1 तथा u_2 को ज्ञात स्थिरांक माना जाता है।

समीकरण (3 1) प्रौद्योगिकी (उत्पादन फलन) का संख्यात्मक (भौतिक) विस्तार है। इस समीकरण में मापन की निम्नांकित तीन इकाइयों का समावेश है

(i) गेहूँ (उपभोग वस्तु) की मापन इकाई, कुन्तल में
(ii) मशीन (पूँजीगत वस्तुओं) की मापन इकाई, मशीनों की संख्या में
(iii) श्रम की मापन इकाई, मानव-वर्ष

अर्थात् Q_2 को कुन्तल Q_1, K_1 तथा K_2 को प्राकृतिक संख्याओं तथा L_1 व L_2 को मानव-वर्ष के रूप में माना जाता है।

समीकरण (3 1) के अन्तर्गत समस्त अर्थव्यवस्था हेतु मात्राओं का योग आवश्यक है। यह योग केवल कीमत (value) के रूप में किया जा सकता है। योग हेतु प्रत्येक मात्र अथवा भौतिक इकाई को किसी उचित कीमत द्वारा गुणा करना आवश्यक है।

यहाँ हम वास्तविक कीमत (न कि मौद्रिक कीमत) को किसी मानक वस्तु (Standard Commodity) के रूप में मानते हैं। उपभोग वस्तु, मशीन अथवा श्रम में से किसी एक को मानक वस्तु माना जा सकता है। मानक वस्तु की कीमत को एक इकाई मानकर अन्य वस्तुओं की कीमत इसके सापेक्ष ज्ञात की जाती है।

यद्यपि हमारे समक्ष दो विकल्प हैं परन्तु हम उपभोग वस्तु को मानक वस्तु मानकर इसकी कीमत एक इकाई निर्धारित कर देते हैं। तथा अन्य वस्तुओं की कीमत सापेक्ष रूप में व्यक्त करते हैं। इस प्रकार द्विक्षेत्रीय निदर्श में सापेक्ष कीमतों का महत्त्वपूर्ण योगदान है।

द्विक्षेत्रीय निदर्श की रचना हेतु तीन कीमतों की आवश्यकता है— पूँजीगत वस्तु पूँजीगत वस्तु की कीमत, उपभोग वस्तु की कीमत तथा श्रम की कीमत। मानक उपभोग वस्तु के रूप में वास्तविक कीमत ज्ञात करने के लिए हम उपभोग वस्तु की मात्रा का प्रतिस्थापन कर देते हैं, परन्तु पूँजीगत वस्तु की मात्रा को p से गुणा करते हैं। यह p गेहूँ के रूप में मशीन की कीमत है। अर्थव्यवस्था की समस्त आय को गेहूँ के रूप में निम्न प्रकार प्रस्तुत किया जा सकता है

$$Y = pQ_I + Q_C \tag{3.2}$$

यहाँ pQ_I प्रथम क्षेत्र की समस्त आय तथा Q_C द्वितीय क्षेत्र की समस्त आय है। आय का माप गेहूँ के रूप में किया गया है। यह निदर्श अर्थव्यवस्था के अन्तर्गत पूर्ण प्रतियोगिता की कल्पना करता है। इस स्थिति में प्रत्येक क्षेत्र का कुल उत्पादन दो उत्पादन साधनों की आय के बराबर है। अर्थात् समस्त उत्पादन को आय में वितरित किया जाता है। पुनश्च पूर्ण प्रतियोगिता के अन्तर्गत पूँजी तथा श्रम की कीमत दोनों क्षेत्रों में एक समान हैं। अतः प्रत्येक क्षेत्र के उत्पादन लागत के समीकरण (सकलनिका) को निम्न प्रकार प्रस्तुत किया जा सकता है

$$pQ_I = prK_I + wL_I$$

तथा

$$Q_C = prK_C + wL_C \tag{3.3}$$

यहाँ pr = पूँजी आय का प्रति इकाई लाभ (गेहूँ के रूप में)

w = श्रम की मजदूरी (गेहूँ के रूप में)

समीकरण (3.1) से K_I तथा L_I एवं K_C तथा L_C के मान समीकरण (3.3) में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$pQ_I = prb_IQ_I + wa_IQ_I$$

$$\{\because K_I = b_IQ_I \text{ तथा } L_I = a_IQ_I\}$$

अथवा $pQ_I = Q_I(prb_I + wa_I)$

अथवा $p = prb_I + wa_I$

अथवा $p = prb_I + wa_I$

अथवा $p(1 - rb_I) = wa_I$

अथवा

$$p = \frac{wa_I}{1 - rb_I} \tag{3.4}$$

समीकरण (3 4) प्रथम क्षेत्र का कीमत समीकरण है।

इसी प्रकार $Q_2 = p\pi v_2 Q_2 + wu_2 Q_2$

($K_2 = v_2 Q_2$ तथा $L_2 = u_2 Q_2$

अथवा $Q_2 = Q_2 (p\pi v_2 + wu_2)$

अथवा $1 = p\pi v_2 + wu_2$

अथवा
$$p = \frac{1-wu_2}{\pi v_2} \tag{3 5}$$

समीकरण (3 5) द्वितीय क्षेत्र का कीमत समीकरण है।

अब, दोनों क्षेत्रों के लिए श्रम-दर का उभयनिष्ठ मान (Common value) ज्ञात करने हेतु समीकरण (3 4) तथा समीकरण (3 5) को बराबर रखते है

$$p = \frac{wu_1}{1-\pi v_1} \text{ प्रथम क्षेत्र}$$

तथा
$$p = \frac{1-wu_2}{\pi v_2} \text{ द्वितीय क्षेत्र}$$

$$\frac{wu_1}{1-\pi v_1} = \frac{1-wu_2}{\pi v_2}$$

अथवा $\pi v_2 wu_1 = (1-wu_2)(1-\pi v_1)$

अथवा $\pi v_2 wu_1 = 1-wu_2 - \pi v_1 + wu_2 \pi v_1$

अथवा $\pi v_2 wu_1 + wu_2 - wu_2 \pi v_1 = 1 - \pi v_1$

अथवा $w(\pi v_2 u_1 + u_2 - u_2 \pi v_1) = 1 - \pi v_1$

अथवा
$$w \frac{1-\pi v_1}{\pi v_2 u_2 + u_2 - u_2 \pi v_1}$$

अथवा
$$w = \frac{1-\pi v_1}{u_2(1-\pi v_1) + \pi v_2 u_1} \tag{3 6}$$

समीकरण (3 6) द्वारा स्पष्ट है कि श्रम दर π तथा स्थिर गुणाकों का फलन है। चूँकि गुणाक स्थिर हैं, अतएव $w = f(\pi)$ समीकरण (3 6) को प्रो सैम्युलसन ने साधन मूल्य सीमा (Factor Price Frontier) कहा है तथा प्रो हिक्स ने इसको श्रम सीमा (Wage Frontier) के नाम से पुकारा है।

इसी प्रकार हम p का मान π तथा स्थिर गुणाकों के रूप में ज्ञात कर सकते हैं-

P.A.Samuelsonn 'Parable and Realismin Capital Theory" Review of Economic Studies (June 1962)

$$p = \frac{wu_1}{1-\tau v_1}$$
$$= \frac{(1-\tau v_1)u_1}{1-\tau v_1)[u_1(1-\tau v_1) + \tau v_2 u_1)}$$

(समीकरण 3 4 से)

अथवा
$$p = \frac{u_1}{u_2(1-\tau v_1) + \tau v_2 u_1} \tag{3 7}$$
$$p = f(\tau)$$

समीकरण (3 6) श्रम सीमा को आयताकार अतिपरवलय (Rectangular hyperbola) हेतु मानक रूप में निम्न प्रकार प्रस्तुत किया जा सकता है

$$w = \frac{1-\tau v_1}{u_2[1-\tau v_1] + \tau v_1 u_1}$$
$$w[u_2(1-\tau v_1) + \tau v_2 u_1] = 1-\tau v_1$$

अथवा
$$wu_2 - wu_2\tau v_1) + w\tau_2 u_1 = 1-\tau v_1$$

अथवा
$$(u_1 v_2 - u_2 v_1) w\beta + u_2 w + v_1\tau = 1 \tag{3 8}$$

पुनश्च , हमें समीकरण (3 1) द्वारा ज्ञात है कि प्रत्येक क्षेत्र में प्रति इकाई अनुपात (पूँजी-श्रम अनुपात, K/L)

$$Q_1 = \frac{K_1}{v_1} = \frac{L_1}{u_1}$$

अथवा
$$\frac{k_1}{L_1} = \frac{v_1}{u_1} \text{ (प्रथम क्षेत्र हेतु प्रति व्यक्ति मशीन अनुपात)} \tag{3 9}$$

तथा इसी प्रकार

$$Q_2 = \frac{K_2}{v_2} = \frac{L_2}{u_2}$$

अथवा
$$\frac{K_2}{L_2} = \frac{v_2}{u_2} \text{ (द्वितीय क्षेत्र हेतु प्रति व्यक्ति मशीन अनुपात)} \tag{3 10}$$

यदि $\frac{v_1}{u_2} = \frac{v_2}{u_2} < \frac{v_2}{u_2}$, तब द्वितीय क्षेत्र (उपभोग वस्तुओं का उत्पादनकर्त्ता) प्रथम क्षेत्र की अपेक्षा अधिक यांत्रिक (Mechanised) है।

यदि $\frac{v_1}{u_2} > \frac{v_2}{u_2}$ प्रथम क्षेत्र (पूँजीगत वस्तुओं का उत्पादनकर्त्ता) द्वितीय क्षेत्र से अधिक यांत्रिक है।

इस प्रकार, हम पूँजी प्रबलता के सामान्य अनुपात (जो कि परिणामों की भविष्यवाणी करने हेतु आवश्यक है) को निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते हैं

$$\mu = \frac{v_2}{u_2} / \frac{v_1}{u_1}$$

अथवा

$$\mu = \frac{u_1 v}{u_2 v_1} \tag{3 11}$$

यहाँ $\frac{v_1}{u_1}$ = प्रथम क्षेत्र में पूँजी (मशीन) का अनुपात

तथा $\frac{v_2}{u_2}$ = द्वितीय क्षेत्र में पूँजी (मशीन) का अनुपात

अब समीकरण (3 11) निर्दिष्ट करता है कि $\mu > 1$ की स्थिति में उपभोग वस्तुओं उत्पादनकर्ता क्षेत्र अधिक यांत्रिक है। तथा $\mu > 1$ की स्थिति में पूँजीगत वस्तुओं का उत्पादनकर्ता क्षेत्र अधिक यांत्रिक है।

समीकरण (3 11) को पुन. लिखने पर हमें प्राप्त होता है,

$$u_2 v_1 \mu = u_1 v_2 \tag{3 11a}$$

इस समीकरण को आयताकार अतिपरवलय के समीकरण में रखने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है.

$$(u_2 v_1 \mu - \mu_2 v_1)\, w\pi + u_2 w + v_1 \pi = 1$$

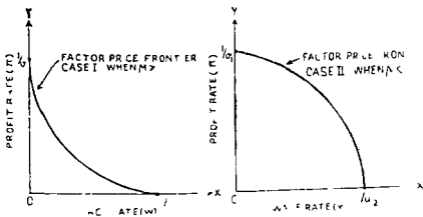
अथवा

$$u_2 v_1 (\mu - 1)\, w\pi + u_2 w + v_1 \pi \tag{3 12}$$

समीकरण (3 12) w के लिए मजदूरी समीकरण है।

समीकरण (3 12) में $w = 0$ रखने पर हमें $\pi = 1/v_1$ प्राप्त होता है तथा $\pi = 0$ रखने पर $w = 1/u_2$ प्राप्त होता है।

इसके द्वारा हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि प्रथम क्षेत्र में π (अधिकतम लाभ) की उच्च सीमा $(1/v_1)$ के बराबर है, जोकि यन्त्रीकरण हेतु महत्वपूर्ण है तथा यह सापेक्ष रूप

से अधिक पूँजी-प्रबल क्षेत्र है। पुन द्वितीय क्षेत्र मे w (अधिकतक श्रम दर) की उच्च सीमा $(1/u_2)$ के बराबर है, जो कि उपभोग वस्तुओ हेतु महत्वपूर्ण है तथा यह सापेक्ष रूप मे अधिक श्रम-प्रबल क्षेत्र है। अस्तु साधन कीमत सीमा (अथवा श्रम सीमा) को $(w \ \pi)$ समतल पर वक्र (आयताकार अतिपरवलय) के रूप मे व्यक्त किया जा सकता है जैसाकि रेखाचित्र 3 1 में स्पष्ट किया गया है।

रेखाचित्र 3 1

यह वक्र दोनों अक्षों को काटता है, w के सगत कटान बिन्दु $(1/u_2 \ 0)$ है, अर्थात् $w = 1/u_2$ जबकि π के सगत कटान बिन्दु $(0, 1/v_1)$ है, अर्थात् जब $w - 0$ तब $\pi \ 1/v_2$ । यदि $\mu < 1$, तब यह वक्र मूल बिन्दु के सापेक्ष उत्तल (Convex) है। यदि $\mu < 1$, तब यह वक्र मूल बिन्दु के सापेक्ष अवतल (Concave) है। दोनों अवस्थाओं में, $w < 1/u_2$ के लिये π का मान अनन्य है तथा $\pi < 1/v_1$ के लिये w का मान अनन्य है, w वृद्धि के फलस्वरूप π के मान में कमी होती है तथा w के मान में कमी के साथ-साथ π के मान में वृद्धि होती है।

अब हम समीकरण (3 7) द्वारा व्यक्त p के मान का π के पदो में अध्ययन करेंगे। अर्थात्

$$p = f(\pi)$$

$$= \frac{u_1}{u_2(1-\pi v_1) + \pi v_2 u_1}$$

अथवा
$$\frac{1}{p} = \frac{u_2(1-\pi v_1) + \pi v_2 u_1}{u_1}$$

$$= \frac{u_2(1-\pi v_1)}{u_1} + \pi v_2$$

$$= \frac{u_2}{u_1} - \frac{\pi u_2 v_1}{u_1} + \pi v_2$$

$$= \frac{u_2}{u_1}\left\{1 - \pi v_1 + \frac{\pi v_2 u_1}{u_2}\right\}$$

$$= \frac{u_2}{u_1}\left(1 + \pi v_1 \left(\frac{v_2 u_1}{u_2 v_1} - 1\right)\right)$$

अथवा
$$\frac{1}{p} = \frac{u_2}{u_1}\{1 + \pi v_1(\mu - 1)\} \qquad (3\ 13)$$

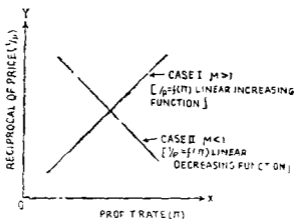
यहाँ
$\mu = \frac{v_2 u_1}{u_2 v_1}$ समीकरण (3 11) द्वारा

समीकरण (3 13) p हेतु **कीमत समीकरण** (price equation for p) है।

इस समीकरण में $1/P$ को π के रेखीय फलन के रूप में प्रदर्शित किया गया है, अर्थात् $\frac{1}{p} = f(\pi)$ । इस फलन का ढाल μ के मान पर निर्भर करता है

यदि $\mu > 1$, तब $1/p$, π का रेखीय तथा वर्धमान (linear and increasing) फलन है, अर्थात् p, π का ह्रासमान (decreasing) फलन है। यदि द्वितीय क्षेत्र (उपभोग वस्तुओं का उत्पादक) सापेक्ष रूप में अधिक यांत्रिक है, तब जैसे-जैसे π के मान में वृद्धि होती है, वैसे-वैसे p के मान में कमी होती जाती है।

इसके विपरीत यदि $\mu < 1$, $1/p$, π का रेखीय तथा ह्रासमान फलन है अर्थात् p, π का वर्धमान फलन है। यदि प्रथम क्षेत्र (पूँजीगत वस्तुओं का उत्पादक) सापेक्ष रूप में अधिक यांत्रिक है, तब जैसे-जैसे π के मान में वृद्धि होती है, वैसे-वैसे p के मान में भी वृद्धि होगी।

इन दोनों अवस्थाओं को रेखाचित्र (3 2) द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

रेखाचित्र 3 2

समीकरणों (3 12) तथा (3 13) द्वारा किसी भी दो कीमतों को तृतीय कीमत के पदो मे अनन्य रूप से (Uniquely) ज्ञात किया जा सकता है। यहाँ पूँजी प्रबलताओं का अनुपात μ, श्रम दर (w) तथा लाभ दर (π) के निर्धारण में निर्णायक चर है। समीकरण (3 1) द्वारा ज्ञात होता है कि ये कीमतें आर्थिक व्यवस्था की प्रौद्योगिकी पर निर्भर हैं।

द्वितीय चरण मात्रा समीकरण
(Stage II Quantity Equations)

हम प्रथम चरण मे यह अध्ययन कर चुके है कि विभिन्न चरों की कीमतें अर्थव्यवस्था की प्रौद्योगिकी पर निर्भर करती है। अब हम यह अध्ययन करेंगे कि दोनों क्षेत्रों की अर्थव्यवस्था के अन्तर्गत मात्राओं के मध्य भी उसी प्रकार सम्बन्ध निर्धारित किया जा सकता है। यहाँ हम मानते है कि मूल्य ह्रास विद्यमान नहीं है, यन्त्रीकरण का पूर्ण उपयोग हो रहा है। अतएव,

पूँजी का कुल उपयोग, $K = K_1 + K_2 = v_1Q_1 + v_2Q_1$

तथा श्रम का कुल उपयोग, $L = L_1 + L_2 = u_1Q_1 + u_2Q_2$ (3 14)

समीकरण (3 14) अर्थव्यवस्था के उत्पादन-साधनों (पूँजी तथा श्रम) हेतु कुल माँग को व्यक्त करता है। यदि प्रत्येक पूँजीगत वस्तु, Q_1 जिसका उत्पादन समय पर हुआ है, पूँजी आगत (K) के पदों में पूर्णरूप से उपयोग में आ जाती हैं तब मूल्यह्रास नहीं होने के परिणामस्वरूप

$$Q_1 = \frac{dK}{dt}$$

यहाँ $\frac{dK}{dt}$ = पूँजीगत वस्तुओं में t समयावधि के अन्तर्गत वृद्धि

अथवा $Q_1 = \frac{dk}{dt} \frac{K}{K}$

$= \frac{K}{K} \; K$ यहाँ $K = \frac{dK}{dt}$ (3 15)

अथवा $Q_1 = gK$ यहाँ $g = \frac{K}{K}$ = पूँजी की विकास दर

समीकरण (3 15) Q_1 के लिए मात्रा समीकरण है।

Q_1 का मान समीकरण (3 14) में रखने पर हमें प्राप्त होता है,

$$K = v_1 Q_1 + v_2 Q_2$$
$$= v_1 gK + v_2 Q_2 \qquad Q_1 = gk$$

अथवा $Q_2 = \frac{K - v_1 gK}{v_2}$

अथवा $Q_2 = \frac{1}{v_2} (1 - v_1 g) K$ (3 16)

समीकरण (3 16) Q_2 के लिये मात्रा समीकरण है:

इसी प्रकार,

$L = u_1 Q_1 + u_2 Q_2$ में $Q_1 = gK$ रखने पर

$$L = u_1 gK + u_2 Q_2$$

$$= u_1 gK + u_2 \frac{1}{v_2} (1 - v_1 g) K$$

समीकरण (3 16) द्वारा

$$= u_1 gK + \frac{u_2}{v_2} K (1 - v_1 g)$$

$$= u_1 gK + \frac{u_2}{v_2} K - \frac{u_2 v_1}{v_2} Kg$$

$$= \frac{u_2}{v_2} K \left(\frac{u_1 g v_2}{u_2} + 1 - v_1 g\right)$$

$$= \frac{u_2}{v_2} K \left(1 + v_1 g \left(\frac{u_1 v_2}{u_2 v_1} - 1\right)\right)$$

अथवा $$L = \frac{u_2}{v_2} K \left(1 + v_1 g (\mu - 1)\right)$$

$$\mu = \frac{u_1 v_2}{u_2 v_1}$$

समीकरण (3 17) L की निर्धारित मात्रा समीकरण है।

समीकरण (3 15), (3 16) तथा (3 17) द्वारा स्पष्ट है कि चारों मात्राएँ Q_1 Q_2 K तथा L के अनुपात पूँजी की विकास दर (g) तथा प्रौद्योगिकी के स्थिर गुणकों के पदों में निर्धारित किए जाते हैं।

यहाँ Q_1 तथा Q_2 मात्रा के निर्धारित हैं, जबकि L तथा K साधन आगतों हेतु सम्पूर्ण माँग को व्यक्त करते है। सन्तुलन मात्रा समीकरणों का इसके मात्र अनुपातों द्वारा स्थापित किया जा सकता है

हमें ज्ञात है,

$$Q_1 = gK$$

तथा $$Q_2 = \frac{1}{v_2}(1 - g v_1) K$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{gK}{\frac{1}{v_2}(1 - g v_1) K} = \frac{g v_2}{1 - g v_1}$$

अथवा $$Q_1 \quad Q_2 = g v_2 \quad (1 - g v_1) \qquad (3\ 18)$$

समीकरण (3 18) पूर्ति पक्ष की मात्रा अनुपात को व्यक्त करता है।

पुनश्च समीकरण (3 17) द्वारा पूँजी-श्रम अनुपात अथवा प्रति व्यक्ति पूँजी की आवश्यकता निम्न प्रकार ज्ञात की जा सकती है

$$L = \frac{u_2}{v_2} K \left(1 + v_1 g (\mu - 1)\right)$$

$$\frac{K}{L} = \frac{v_2}{u_2} \left(1 + v_1 g (\mu - 1)\right)$$

अथवा $$K.L = v_2 \quad u_2 \left(1 + v_1 g (\mu - 1)\right) \qquad (3\ 19)$$

समीकरण (3 19) माँग पक्ष के साधन आगत अनुपात को व्यक्त करता है।

प्रथम तथा महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष यह है कि प्रत्येक मात्रा तब ही धनात्मक होगी, जबकि

$g < 1/v_1$ (3 20)

यदि $g = 1/v_2$, तब Q_2 का मान शून्य के बराबर होगा ($Q_2 = 0$) अर्थात् द्वितीय क्षेत्र में उत्पादन हेतु g का मान $1/v_2$ से कम होना चाहिये। अर्थात g की सीमाएँ निम्न प्रकार है

$$0 \le g < 1/v_1$$

द्वितीय चरण के अन्तर्गत द्वितीय निष्कर्ष यह है कि यदि μ (पूँजी प्रबलताओं का अनुपात) > 1 अर्थात् द्वितीय क्षेत्र प्रथम क्षेत्र के सापेक्ष अधिक यांत्रिक है अथवा अधिक पूँजी प्रबल है, तब g यन्त्रीकरण की विकास दर में वृद्धि के परिणामस्वरूप प्रति व्यक्ति पूँजी अथवा K/L अनुपात में कमी होगी। इसके विपरीत यदि $\mu < 1$ अर्थात् प्रथम क्षेत्र अधिक यांत्रिक है, तब g (पूँजी विकास की दर) में वृद्धि के फलस्वरूप प्रति व्यक्ति पूँजी अथवा K/L अनुपात में भी वृद्धि होगी।

तृतीय चरण . निवेश बराबर बचत
(Stage III Investment Equals Savings)

अब तक हम उत्पादन फलन (पूर्ण क्षमता) की सन्तुलन शर्त अथवा आर्थिक व्यवस्था की प्रौद्योगिकी का अध्ययन कर रहे थे। इस चरण में श्रम शक्ति को सम्मिलित किया जाता है। पूर्णतया बेलोचदार पूर्ति के अन्तर्गत प्रचलित श्रम दर पर श्रम शक्ति की वृद्धि की आनुपातिक दर n ग्रहण की जाती है। समय विलम्बता को स्वीकार नहीं किया जाता है। यन्त्रीकरण (पूँजी) तथा श्रम की पूर्ण क्षमता के प्रयोग की कल्पना की जाती है। अस्तु, t समय पर

$$L = L_o e^{nt}, \quad \text{यहाँ } L_0 = \text{श्रम का प्रारम्भिक वृत्तिदान}$$

श्रम पूर्ति तथा प्रौद्योगिकी से सम्बन्धित उपर्युक्त मान्यताओं के अतिरिक्त हम श्रम दर (w) अथवा लाभ दर (π) को बाह्य रूप से ज्ञात मान लेते हैं। पुन , प्रथम चरण के अन्तर्गत, प्रत्येक कीमत w या π के रूप में ज्ञात की जाती है, यहाँ (w) अथवा π (एक में वृद्धि के फलस्वरूप दूसरे में कमी होती है) को निदर्श का स्वतन्त्र प्राचल माना गया है जिसका मान आय के वितरण के अनुसार स्थिर किया जाता है। पुनश्च,द्वितीय चरण के अन्तर्गत मात्रा समीकरणों द्वारा अन्य मात्राओं Q_1, Q_2 तथा K को L के पदों में व्यक्त किया गया है, जबकि g (यन्त्रीकरण के विकास की दर) ज्ञात हो। अर्थव्यवस्था के दोनों क्षेत्रों को पूँजी तथा श्रम आगतों का आवटन Q_1 Q_2 तथा स्थिर गुणाक पर आधारित है।

अब सन्तुलन की शेष शर्त नियोजित निवेश तथा बचत के बराबर होने की है। यह शर्त समय विलम्बता रहित समस्त उत्पादन के प्रवाह की शर्त है। इस शर्त द्वारा नियमित विकास की दर g को स्थिर किया जाता है।

तृतीय चरण के अन्तर्गत निवेश/बचत शर्त का विशिष्ट रूप से अध्ययन करना आवश्यक है। इस शर्त को वास्तविक रूप में अर्थात् उपभोग वस्तुओं (गेहूँ) के रूप में व्यक्त किया जाना चाहिये। अस्तु

$$I = p\frac{dK}{dt}$$

तथा $$S = sY = s(pQ_1 + Q_2)$$

यहाँ $$Y = pQ_1 + Q_2$$

= गेहूँ के रूप में अर्थव्यवस्था की समस्त आय

$$I = S$$

अथवा $$p\frac{dK}{dt} = s\,(pQ_1 + Q_2)$$

अथवा $$K = \frac{s}{p}\,(pQ_1 + Q_2)$$

यहाँ $$K = \frac{dk}{dt}$$

अथवा $$\frac{K}{K} = g = \frac{s}{pK}\,(pQ_1 + Q_2)$$

यहाँ $$\frac{K}{K} = g$$

अथवा $$g = s\frac{Q_1}{K} + \frac{s}{p}\frac{Q_2}{K} \qquad (3\,21)$$

$Q_1 = Kg$ तथा $Q_2 = K\dfrac{(1-v_1 g)}{v_2}$ रखने पर

$$g = s\frac{Kg}{K} + \frac{s}{p}K\frac{1-v_1 g)}{v_2 K}$$

अथवा $$g = sg + \frac{s}{p}\frac{(1-v_1 g)}{v_2}$$

अथवा $(g-sg)\,pv_2 = s\,(1-v_1 g)$

अथवा $gpv_2 - sgpv_2 = s - sv_1 g$

अथवा $gpv_2 - sgpv_2 + sv_1 g = s$

अथवा $g[pv_2 - spv_2 + sv_1] = s$

अथवा
$$g = \frac{s}{pv_2 + (v_1 - pv_2)s} \tag{3 22}$$

समीकरण (3 22) विकास की अभीष्ट दर (warranted) (जो कि स्थिर है) को व्यक्त करता है। अतएव नियमित हल हेतु सन्तुलन की तृतीय शर्त के अनुसार अभीष्ट दर विकास की स्वाभाविक दर के बराबर होनी चाहिये। अर्थात

$$g = \frac{s}{v_2 p + (v_1 - v_2 p)s}\, n \tag{3 23}$$

यह समीकरण ही निदर्श का आधारभूत समीकरण है।

इस समीकरण द्वारा स्पष्ट है कि विकास की अभीष्ट दर (g), यन्त्रीकरण अथवा गेहूँ के रूप में पूंजीगत वस्तु की कीमत (p), स्थिर बचत गुणाक s तथा स्थिर गुणाकों $(v_1$ तथा $v_2)$ पर निर्भर करती है।

परिणामों का पूर्वानुमान करने हेतु (3 23) का p के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{\partial g}{\partial p} = -\frac{sv_2\,(1-s)}{(v_2 p + (v_1 - v_2 p)s\,)^2} < 0$$

तात्पर्य यह है कि p में वृद्धि के फलस्वरूप g में कमी होती है। अर्थात् यन्त्रों (Machines) की कीमत जितनी अधिक होगी अभीष्ट दर उतनी ही कम होगी। कीमत समीकरण द्वारा p के मान का परिवर्तन μ पर निर्भर करता है। कीमत समीकरण

$$\frac{1}{p} = \frac{u_2}{u_1}\,(1 + v_1 \pi (\mu - 1)\,) \qquad \text{यहाँ } p = f(\pi)$$

के सदर्भ में हम दोनों स्थितियों की निम्न प्रकार व्याख्या कर सकते हैं

स्थिति I : $\mu > 1$

यदि $\mu > 1$, तक $1/P$, π का रेखीय तथा वर्धमान फलन है, अर्थात् p, π का ह्रासमान फलन है। यदि द्वितीय क्षेत्र अधिक यात्रिक हो, तब π में वृद्धि के स्वरूप p के मान में कमी होती है।

इस स्थिति में π की सीमाएँ $0 \leq \pi \leq 1/v_1$ हैं।

$\pi = 0$ तथा $\pi = 1/v_2$ रखने पर हमें $1/p$ के मान प्राप्त होते हैं

यदि $\pi = 0$, तब $\frac{1}{P} = \frac{u_2}{u_1}$ अथवा $p = \frac{u_1}{u_2}$

तथा यदि $\pi = \frac{1}{v}$ तब $\frac{1}{p = \frac{u_2}{u_1}\mu}$ अथवा $p = \frac{u_1}{u_2}\ \frac{1}{\mu}$

अब p के इन मानों को समीकरण 3 23 में रखने पर हम g की सीमाए निम्न प्रकार प्राप्त कर सकते है

$$g = \frac{s}{v_2 p + (v_1 - v_2 p)s}$$

$p = \frac{u_1}{u_1}$ रखने पर g की निम्न सीमा प्राप्त होती है

$$g_L = \frac{s}{v_2\frac{u_1}{u_2} + v_1 - v_2\frac{u_1}{u_2}s}$$

$$= \frac{s}{v_2\frac{u_1}{u_2} + v_1 s - \frac{v_2 u_1}{u_2}s}$$

$$= \frac{s}{v_1 \frac{v_2 u_1}{u_2 v_1} + s - \frac{v_2 u_1}{u_2 v_1}}$$

$$= \frac{s}{v_1[\mu + s - \mu s]} \qquad \mu = \frac{v_2 u_1}{u_2 v_1}$$

अथवा
$$g_L = \frac{s}{v_1\,[1-(1-\mu)(1-s)]} \qquad (3\ 24)$$

इसी प्रकार $p = \frac{u_1}{u_2}\ \frac{1}{u}$ रखने पर, हमें g की उच्च सीमा प्राप्त होती है

$$g_u = \frac{s}{\frac{v_2 u_1}{u_2 \mu} + v_1 s \frac{v_2 u_1}{u_2 \mu}} s$$

$$= \frac{s}{v_1 \frac{v_1 u_1}{u_2 v_1 \mu} + s - \frac{v_2 u_1}{u_2 v_1 \mu} s}$$

$$= \frac{s}{v_1 \frac{\mu}{\mu} + s - \frac{\mu}{\mu} s} \qquad \mu = \frac{v_2 u_1}{u_2 v_1}$$

$$= \frac{s}{v_1 (1 + s - s}$$

अथवा

$$g_u = \frac{s}{v_1} \tag{3 25}$$

समीकरण (3 25) उच्च सीमा हेतु हैरोड-डोमर विकास दर को व्यक्त करता है।

स्थिति II : $\mu < 1$

यदि $\mu < 1$, तब प्रथम क्षेत्र में (पूँजीगत वस्तु) का उत्पादन अधिक यान्त्रिक है तथा $1/p$, π का रेखीय तथा ह्रासमान फलन है। अर्थात् π में वृद्धि के फलस्वरूप p में वृद्धि होती है। अत π के मान में 0 से $1/v_1$ तक वृद्धि के फलस्वरूप p में $\frac{u_1}{u_2}$ से $\frac{1}{\mu} \frac{u_1}{u_2}$ तक वृद्धि होती है तथा g के मान में $\frac{s}{v_1[1-(1-\mu)(1-s)]}$ से $\frac{s}{v_1}$ तक कमी होती है।

अस्तु, दोनों स्थितियों में π के मान में वृद्धि (अथवा w के मान में ह्रास), $g = n$ सन्तुष्ट करने के लिये पर्याप्त है। अत नियमित विकास की शर्त पूर्ण होती है, यदि n का मान g_L तथा g_u के मध्य निर्धारित किया जाये। इस प्रकार n के स्वीकार्य मान निम्न प्रकार है

स्थिति I : $\mu > 1, \frac{1}{1 + (\mu-1)(1-s)} < n < \frac{s}{v_1}$

तथा स्थिति II : $\mu < 1, \frac{s}{v_1} < n < \frac{s}{v_1[1_1 + (\mu-1)(1-s)]}$

चतुर्थ चरण : हैरोड-डोमर निदर्श का व्युत्पादन
(Stage IV Derivation of Harrod Domar Model)

विशिष्ट रूप में, यदि $\mu = 1$, अर्थात् पूँजी प्रबलताओं के अनुपात बराबर होने के फलस्वरूप दोनो समान रूप से यांत्रिक (Mechanised) है। तब हैरोड-डोमर शर्त,

$$n = \frac{s}{v_1}$$

पुन प्राप्त की जा सकती है

यदि $\mu = 1$, तब $\frac{1}{p} = \frac{u_2}{u_1}(1 + v_1\pi(\mu - 1))$ द्वारा

$$\frac{1}{p} = \frac{u_2}{u_1} \qquad \text{अथवा } p = \frac{u_1}{u_2}$$

p का मान समीकरण $g = \frac{s}{v_2 p + (v_1 - v_2 p)s}$ में रखने पर

$$g = \frac{s}{v_1[1 + (\mu - 1)(1 - s)]}$$

अथवा

$$g = \frac{s}{v_1} = n \qquad \mu = 1$$

4

सैम्युलसन-हिक्स गुणक-त्वरक निदर्श
(Samuelson-Hicks Multiplier-Accelerator Model)

पूर्व अध्यायों के अन्तर्गत उन निदर्शों का अध्ययन किया गया है जोकि कीन्स के अल्पकालीन सन्तुलन के विश्लेषण पर आधारित हैं। ये निदर्श वास्तविक तथा मौद्रिक रूप में व्यक्त किये गये है, परन्तु स्वायत्त निवेश के अतिरिक्त पूँजी सचय आदि की उपेक्षा की गई है। इन निदर्शों के अन्तर्गत जनसख्या वृद्धि की दर एव तकनीकी प्रगति की दर को ज्ञात मान लिया जाता है।

परन्तु अधिकाश अनुभवयुक्त अध्ययनों द्वारा ज्ञात हुआ है कि इनमें चक्रीय परिवर्तिता (Cyclical variability) पायी जाती हैं। इसके अतिरिक्त कुछ अनुपातों में दीर्घकालीन प्रवृत्ति अथवा उपनति (Trend) भी विद्यमान रहती है। अतएव इन उपादानों (Factors) के अध्ययन द्वारा दीर्घकालीन सन्तुलन की विशेषताओं का ज्ञान होता है। इस अध्याय में हम चक्रीय गति (Cyclical movements) के अध्ययन का प्रयास नहीं करेंगे, अपितु कुछ दीर्घकालीन प्रवृत्तियों के आकलन का प्रयास करेंगे।

अधिकाश चक्रीय गतियों के मुख्य-मुख्य उपादानों (Factors) का सरलतापूर्वक उल्लेख किया जा सकता है। बचत-आय अनुपात[1] के अन्तर्गत अश (Numerator) धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकता है। असाधारण अवस्थाओं में उपभोक्ता के बजट का सर्वाधिक समायोज्य भाग बचत होता है।

अत मदीकाल (Depressions) यथा अपगमन (Recessions) की अवधि में कम मानों (Low values) तथा कुछ स्थितियों में ऋणात्मक मानों एव सहसा वृद्धि (Booms) की अवधि में उच्च मानों को प्रदर्शित करने हेतु इस अनुपात में उच्चावचनों (Fluctuations) की प्रत्याशा की जानी चाहिये।

---

1 बचत-आय अनुपात के स्थान पर उपभोग-आय अनुपात के आधार पर ही गणना की जाती है। अप्रत्यक्ष रूप में, शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद (Net national product) में से वर्तमान उपभोग (Current consumption) घटाने के पश्चात् जो अवशेष बचता है, उसे बचत (Saving) कहते हैं।

सामान्य आर्थिक ह्रास की अवधि में पूँजी-निर्गत अनुपात (त्वरक) में वृद्धि होती है, क्योंकि इस स्थिति में उत्पादन में कमी हो जाती है, परन्तु पूँजी-भण्डार लगभग स्थिर रहता है। इस अवधि में उत्पादन में कमी मन्दीकाल की अपेक्षा कम होती है। इसी प्रकार, उत्पादन में तीव्र गति से वृद्धि होती है, परन्तु पूँजी (निवेश) में वृद्धि की गति मन्द होती है। अतएव इस प्रकार की स्थिति में अनुपात में कमी हो जाती है। पुन , अत्यधिक सामूहिक रूप में उत्पादन योग्य सम्पत्ति (Productive wealth) के निजी एव सार्वजनिक भण्डार को पूँजी कहा जाता है। पूँजी की धारणा तथा निवेश की धारणा में सगति होना आवश्यक एव महत्त्वपूर्ण है। निजी पूँजी निर्माण (गृह, माल सूची परिवर्तन (Inventory change) व्यापारिक सरचना, तथा उत्पादक के निजी यन्त्र) एव सार्वजनिक पूँजी निर्माण की गणना निवेश के अन्तर्गत ही की जाती है। पूँजी भण्डार में परिवर्तन की दर को निवेश के बराबर करने हेतु, निवेश की शुद्ध माप की जानी चाहिये। अर्थात् सकल निवेश व्यय में से पूँजी उपभोग को घटा देना चाहिये। सगति हेतु पूँजी-निर्गत अनुपात (त्वरक) में निर्गत चर का भी शुद्ध मापाकन होना चाहिये।

सर्वोपरि रूप से हम *असन्तुलित प्रावैगिक निदर्शों (Disequilibrium dynamic)* से सम्बन्धित हैं, जो कि पश्चता (Lags) तथा त्रुटि-समायोजन की स्थितियों पर यथासम्भव आधारित हैं। तुलनात्मक दृष्टि द्वारा दीर्घकालीन वृद्धि मानक (Standard) सिद्ध हुई है। इन *सन्तुलन निदर्शों को प्राय चक्रीय निदर्श (Cycle models) भी कहते हैं।*

इस सदर्भ में हम सैम्युलसन-हिक्स गुणक-त्वरक अन्तक्रिया निदर्श (Samuelson-Hicks Multiplier-Accelerator Interaction Model) प्रस्तुत कर सकते है।[1] प्रो सैम्युलसन ने इस निदर्श को विकसित किया परन्तु तत्पश्चात् प्रो हिक्स ने इसमें कुछ परिवर्तन किये। इन निदर्श की निम्नलिखित तीन मान्यताएँ हैं

(i) विकास की अभीष्ट दर।
(ii) अर्थव्यवस्था में स्वायत्त तथा प्रेरित निवेश।
(iii) गुणक तथा त्वरक की साथ-साथ उपस्थिति।

यदि स्वायत्त व्यय विद्यमान है तथा समय के साथ इसका मान स्थिराक A है तब स्थिरता की स्थिति में निर्गत स्तर A/s के बराबर होगा जहाँ *$(1/s)$* गुणक है। विकास के उतार-चढ़ाव $Y = A/S$ की अवस्था में चहुँमुखी होते हैं। सैम्युलसन-हिक्स निदर्श के अन्तर्गत A को स्थिर नहीं माना गया है, परन्तु बाह्य कारणों से इसे समय के साथ परिवर्तनशील माना जाता है। स्वायत्त व्यय सरकार द्वारा किया जाता है जिसे निर्दिष्ट उद्देश्यों को प्राप्त करने हेतु निर्गत में वर्तमान गतिविधियों के अनुसार नियन्त्रित किया जाता है।

---

1 The original formulation was made by P.A. Samuelson , Interaction between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration, Review of Economic Statistics (May 1939) The analysis here follows J.R. Hicks A contribution to the Theory of the Trade Cycle (1956)

हिक्स के अनुसार– उपभोग एक समयावधि पूर्व की आय का फलन है तथा निवेश एक समयावधि पूर्व की आय-परिवर्तन का फलन है।

मान लो,

Y_t = t समयावधि में उत्पादन
C_t = t समयावधि में उपभोग
I_t = t समयावधि में निवेश
A_t = t समयावधि में सरकार द्वारा किया गया स्वायत्त निवेश (बाह्य रूप से निर्धारित)

तब, आय तत्समक (Income identity) को निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$Y_t = C_t + I_t + A_t \qquad (4.1)$$

पुन $\quad C_t = cY_{t-1},\ 0 < C < 1 \qquad (4.2)$

यहाँ $\quad c$ = उपभोग की सीमान्त प्रवृत्ति
Y_{t-1} = $(t-1)$ समयावधि में आय

तथा $\quad I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) = v\Delta Y_{t-1} \qquad (4.3)$

यहाँ $\quad v$ = त्वरक गुणांक
Y_{t-2} = $(t-2)$ समयावधि में आय

समीकरण (4.2) तथा (4.3) से C_t तथा I_t का मान समीकरण (4.1) में रखने पर हमें प्राप्त होता है,

$$Y_t = cY_{t-1} + v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + A_t$$

अथवा $\quad Y_t - (c + v)Y_{t-1} + vY_{t-2} = A_t \qquad (4.4)$

समीकरण (4.4) सैम्युलसन-हिक्स निदर्श का आधारभूत समीकरण है।

हल– समीकरण (4.4) द्वितीय क्रम का अन्तर समीकरण है। अस्तु, इस समीकरण को निम्न प्रकार हल किया जा सकता है

किसी भी अन्तर समीकरण का हल दो अवयवों के योग के रूप में किया जाता है। अर्थात्

हल– विशेष आकलक + पूरक आकलक

अथवा $\quad Y = Y_p + Y_c$

यहाँ $\quad Y_p$ = विशेष आकलक

तथा Y_c = पूरक आकलक

पूरक हल प्राप्त करने हेतु हम सहसमीकरण (Auxilliary Equation)

$$Y_t - (c+v)Y_{t-1} + vY_{t-2} = 0 \qquad (4\ 5)$$

यहाँ $A_t = 0$

की सहायता लेते हैं।

मान लो समीकरण (4 5) का हल $Y_t = \lambda^t$ है, तब विशिष्ट समीकरण (Characteristic equation) निम्नलिखित है

$$\lambda^t - (c+v)\lambda^{t-1} - v\lambda^{t-2} = 0 \qquad (4\ 6)$$

तब दो स्वेच्छ अचरों के रूप में समीकरण (4 6) का हल निम्नलिखित है

$$Y_t = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t \qquad (4\ 7)$$

यहाँ λ_1 तथा λ_2 द्विघाती समीकरण

$$\lambda^2 - (c+v) + v = 0 \qquad (4\ 8)$$

के दो मूल हैं। अर्थात्

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{(c+v) + \sqrt{(c+v)^2 - 4v}}{2} \qquad (4\ 9)$$

समीकरण (4 9) अथवा समीकरण (4 8) द्वारा स्पष्ट है कि

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= c+v > 0 \\ \text{तथा} \quad \lambda_1\lambda_2 &= v > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4\ 10)$$

अब हम c के सापेक्ष v के विभिन्न मानों की सम्भावनाओं का अध्ययन करेंगे

(i) प्रथम स्थिति, मूल λ_1 तथा λ_2 वास्तविक हैं एवं पथ चक्रीय नहीं है, यदि

$$(c+v)^2 > 4v$$

[यदि $ax^2 + bx + c = 0$ हो तब x के दो मान निम्नलिखित हैं

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

अर्थात् $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac} <}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-B - \sqrt{-b^2 - 4ac}}{2a}$/

अथवा $$\frac{(c+v)^2}{4} > v$$

(ii) द्वितीय स्थिति, मूल λ_1 तथा λ_2 मिश्रित (Conjugate complex) अथवा काल्पनिक, यदि

$$(c+v)^2 < 4v$$

अथवा $$\frac{(c+v)^2}{4} < v$$

इसका तात्पर्य यह है कि यदि ऐसा हो जाये तब समीकरण (4 6) का हल

$$y_t = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t$$

(यहाँ A_1, तथा A_2 स्वेच्छ अचर हैं)

चक्रीय (Oscillatory) होगा।

(iii) तृतीय स्थिति मूल λ_1 तथा λ_2 बराबर है, यदि

$$(c+v)^2 = 4v$$

तब पथ परवलयिक (Parabolic) होगा।

विशेष आकलक को निम्न प्रकार ज्ञात किया जाता है

समीकरण (4 4) के पद A_t को स्थिर $(A_t = 1)$ मान लेने पर

$$Y_t = A_t = A,$$

अथवा $$y_{t-1} = A_{t-1} = A$$

तथा $$Y_{t-2} = A_{t-2} = A$$

अतः समीकरण (4 4) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$A-(c+v)A+vA = 1$$

अथवा $$A = \frac{1}{1-c} - (0<c<1)$$

अतः निदर्श का सामान्य हल निम्नलिखित है।

$$Y_t = Y_p + Y_c$$

अथवा $$Y_t = \frac{1}{1-c} + A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t \qquad (4\ 11)$$

अब A_1 तथा A_2 का मान ज्ञात करने हेतु $t = 0$ तथा $Y_t = 0$ (प्रारम्भिक मान) रखने पर हमें (4 11) से निम्नांकित दो समीकरण प्राप्त होते हैं

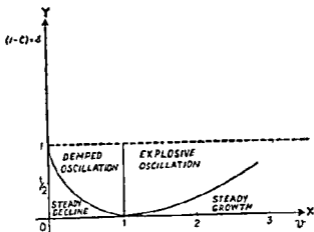
$$\left.\begin{aligned} Y_0 &= \frac{1}{1-c} + A_1 + A_2 = 0 \\ \text{तथा} \quad Y_1 &= \frac{1}{1-c} + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad (4\ 12)$$

समीकरण (4 12) में निहित दोनों समीकरणों को हल करने पर

$$A_1 = \frac{\lambda_2 - c}{(1-c)(\lambda_1-\lambda_2)}$$

तथा

$$A_2 = \frac{c-\lambda_1}{(1-c)(\lambda_1-\lambda_2)}$$

इन परिणामों की व्याख्या c के मान को स्थिर (अथवा ज्ञात) मानकर तथा v के मान में परिवर्तन (अर्थात् निदर्श में समयावधि की परचता में परिवर्तन) के द्वारा की जा सकती है।[1] रेखाचित्र 4 1 में (v,s) तल पर विभिन्न क्षेत्रो को प्रदर्शित किया गया है। दोलन की न्यूनतम समयावधि हेतु $v = 1-s = c$ (c ज्ञात हो।)

रेखाचित्र 4 1

उपर्युक्त रेखाचित्र से निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण परिणाम प्राप्त किए जा सकते है,

(i) यदि $v > 1$, तब विस्फोटक चक्र (Explosive cycle) है

1 गुणक त्वरक निदर्श के उच्च अध्ययन हेतु देखिये
R.G.D.Allen: *MacrO-Economic Theory (1970) Chapters 17-20*

(ii) यदि $v = 1$, तब नियमित चक्र (regular cycle) हैं।

(iii) यदि $v > 1$, तब परिमन्दित चक्र (damped cycles) है।

$s1-c$ के प्रभाव का महत्त्व कम है, परन्तु इन परिमाणों द्वारा शीघ्रतापूर्वक निर्दिष्ट होता है। रेखाचित्र 4.1 द्वारा ज्ञात होता है कि जिस प्रकार s के मान में कमी होती है, उसी प्रकार चक्रों अथवा दोलनों का परिसर संकुचित होता जाता है। एक इकाई के असमान v का मान उत्तम माना जाता है, परन्तु इकाई तथा s के मान में अधिक अन्तर नहीं होगा यदि $s(=1-c)$ छोटा हो।

5

पश्चता निदर्श अथवा स्व:समाश्रयणीय निदर्श (Lag Models or Autoregressive Models)

पश्चता (Lag)

कारण तथा प्रभाव के मध्य समयावधि को पश्चता (Lag) कहते हैं। एक आर्थिक चर पर अन्य चर का प्रभाव कुछ समय पश्चात् दृष्टिगोचर होता है। अनुभवयुक्त शोध के अन्तर्गत पश्चता चरों का उपयोग माँग के अतिरिक्त अन्य क्षेत्रों तक ही सीमित है। अर्थशास्त्र के अन्तर्गत रेखीय समाश्रयणीय निदर्श आश्रित एवं स्वतंत्र चरों के मध्य कारणात्मक सम्बन्ध को व्यक्त करता है। अर्थात्, स्वतंत्र चरों में से एक चर में इकाई परिवर्तन के फलस्वरूप आश्रित चर में कुछ समय व्यतीत होने के पश्चात् परिवर्तन होता है। अर्थात् किसी निश्चित समयावधि के पश्चात् ही किसी 'कारण' का प्रभाव उत्पन्न होता है। उदाहरणार्थ, आलू के मूल्य में कमी का प्रभाव उसके उत्पादन क्षेत्रफल (Acreage) पर आलू बोने के समय पर ही होगा। इसी प्रकार अग्रिम उत्पादन के समय तक आलू के उत्पादन में भी कमी नहीं होगी। कारण तथा इसके प्रभाव के मध्य व्यतीत समय को ही पश्चता (Lag) कहते है।

पश्चता एक निश्चित समयावधि हो सकती है, जैसे तीन वर्ष अथवा एक माह आदि। परन्तु अनेक स्थितियों में किसी कारण का प्रभाव अनेक दिनों अथवा मासों अथवा वर्षों में विभाजित होता है। इस स्थिति को वितरित पश्चता अथवा विभाजित पश्चता (Distributed Lag) कहते हैं। उदाहरणार्थ, किसी विज्ञापन द्वारा बिक्री पर कुछ प्रभाव आज, कुछ कल तथा कुछ प्रभाव कुछ समय पश्चात् हो सकता है, आदि, आदि। कारणात्मक सम्बन्ध जिसके अन्तर्गत स्वतन्त्र चर में किये गये परिवर्तन का प्रभाव दीर्घ समयावधि में वितरित होता है, वितरित पश्चता प्रभाव (Distributed Lag Effect) कहा जाता है। स्व समाश्रयणीय निदर्श एवं वितरित पश्चता निदर्श प्राय समान सदर्भों में उदित होते हैं। अर्थात् जब समायोजन साथ-साथ नहीं हो पाता अथवा जब वर्तमान समयावधि के अन्तर्गत प्रत्याशा स्वतंत्र चर के विगतमानों पर आधारित होती है, उस समय वितरित पश्चता अथवा स्व समाश्रयणीय निदर्श उदित होते हैं। स्व समाश्रयणीय निदर्श वे रेखीय निदर्श हैं, जिनके अन्तर्गत आश्रित चर के मानों में स्वतंत्र चर के सापेक्ष समय पश्चता होती है।[1] वास्तव में, एक समाश्रयणीय निदर्श को सदैव वितरित पश्चता के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

समय पश्चता के अनेक कारण हो सकते हैं। परन्तु सुविधानुसार इन कारणों को निम्नलिखित तीन समूहों में व्यक्त किया जा सकता है।

(I) मनोवैज्ञानिक कारण (Psychological Reasons)

इस शीर्षक के अन्तर्गत उपभोक्ता की कुछ निश्चित मान्यताओं तथा आदतों को सम्मिलित किया जाता है। उत्पादन का निर्धारण करते समय माँग के विषय में सूचना प्राप्त करना आवश्यक है, परन्तु जब तक सूचनाएँ प्राप्त होती है, तब तक उनका समय व्यतीत हो जाता है। अत निर्णयों को अत्यधिक विलम्ब से लागू करना पडता है। इस प्रक्रिया में विगत माँग पर निर्भर रहना पड़ता है, जोकि प्रत्याशा के लिये आवश्यक है। अस्तु, माँग *में परिवर्तन के फलस्वरूप उत्पादन स्तर में परिवर्तन कुछ समय पश्चात् ही सम्भव होता है।*

(II) तकनीकी कारण (Technical Reasons)

तकनीकी कारणों हेतु, माँग परिवर्तन के परिणामस्वरूप उत्पादन में हुये परिवर्तन समयावधि में वितरित होते है। उदाहरणार्थ, यदि उत्पादन में वृद्धि का निर्णय किया जाता है, तब उत्पादन वृद्धि के उच्चतर स्तर को केवल चरणों (Stage) द्वारा ही प्राप्त करना सम्भव है। इसी मध्य माँग में पुन परिवर्तन हो सकते है, जिनका समायोजन आवश्यक हो जाता है। इस प्रकार माँग के सगत उत्पादन करने हेतु एक निश्चित समय पर नहीं अपितु औसत माँग को समयावधि पर दृष्टिगत रखना आवश्यक है। अत किसी समय विशेष पर किया जाने वाला उत्पादन माँग के विगत औसत परिवर्तनों पर निर्भर करता है।

(III) सस्थागत कारण (Institutional Reasons)

इसके अन्तर्गत दो स्थितियाँ सम्मिलित की जाती हैं (a) वे स्थितियाँ जबकि माँग *अथवा उपभोक्ता व्यवहार में परिवर्तन होने से पूर्व व्यय की सविदात्मक वस्तुओं* (Contractual items) अथवा बचत को समायोजित करना आवश्यक है, *(b)* इस तथ्य के परिणामस्वरूप उत्पन्न स्थितियाँ जबकि कुछ बाजार विशेषत टिकाऊ वस्तुओं (Durable goods) हेतु आर्थिक दृष्टिकोण से अपूर्ण हैं।

पश्चता निदर्शों के प्रकार
(Types of Lag Models)

पश्चता निदर्श दो प्रकार के होते हैं– प्रथम स्थैतिक तथा द्वितीय गत्यात्मक। स्थैतिक निदर्श में परिवर्तन शीघ्रतापूर्वक होते है। परन्तु वास्तविक जीवन में यह सम्भव नहीं है। अस्तु, सदैव समय पश्चता विद्यमान रहती है। परिणामस्वरूप निदर्श गत्यात्मक प्रकार का होता है, अत पश्चता निदर्श गत्यात्मक निदर्श हैं।

---

1 Autoregressive models are linear models that contain lagged values of the dependent variable as independent variables

पश्चता निदर्श को निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है

$$Y = aX_1 + bX_2 + cX_3$$

यहाँ, Y आश्रित चर तथा X_1, X_2 व X_3 स्वतन्त्र चर हैं और a, b व c स्थिर गुणांक हैं। अर्थशास्त्र के अन्तर्गत स्वतन्त्र चरों का प्रभाव शीघ्र नहीं होगा, अपितु कुछ समय पश्चात् (एक अथवा दो वर्ष आदि में) होता है। उदाहरणार्थ, मानलो आलू की फसल का क्षेत्रफल केवल पूर्व मौसम में आलू के मूल्यों का ही नहीं अपितु पूर्व मौसम में फसल के क्षेत्रफल का भी फलन है, अर्थात्,

$$A_t = a + b_1 A_{t-1} + b_2 P_{t-1} + e_t$$

यहाँ

A_t = t समयावधि में आलू की फसल का क्षेत्रफल

A_{t-1} = पूर्व समयावधि में आलू की फसल का क्षेत्रफल

p_{t-1} = पूर्व समयावधि में आलू का मूल्य

आर्थिक विश्लेषण में प्रयुक्त किये जाने वाली पश्चता अनेक प्रकार की हैं। परन्तु निम्नलिखित दो प्रणालियाँ विशेष रूप से उल्लेखनीय हैं

(1) समायोजन पश्चता (Adjustment Lag)

(2) प्रत्याशित पश्चता (Expectational Lag)

समायोजित पश्चता (Adjusted Lag)

समायोजित पश्चता तकनीकी तथा संस्थागत दृढ़ताओं का परिणाम है, जिनके अभाव में प्रतिक्रिया असम्भव है। वस्तुगत कठिनाइयों (विलम्ब) द्वारा उत्पन्न पश्चता को समायोजित पश्चता कहते हैं।

प्रत्याशित पश्चता (Expectational Lag)

प्रत्याशित पश्चता व्यक्तियों के मनोवैज्ञानिक व्यवहारों का परिणाम है। अतएव, यदि A_t t समयावधि में किसानों द्वारा आलू की उपज हेतु उपयोग किये गये क्षेत्रफल को प्रदर्शित करता है तथा $p*_t$ t समयावधि में उपज का प्रत्याशित मूल्य प्रदर्शित करता है, तब A_t आश्रित चर तथा $P*_t$ स्वतन्त्र चर है, अत

$A_t = f(P*_t)$ अथवा $A_t = ap^*_t$, यहाँ a = स्थिरांक

$A_t = f(P*_t)$ अथवा A_t में परिवर्तन वास्तविक मूल्य का फलन नहीं है, अपितु प्रत्याशित मूल्य का फलन है। अब हम इन पश्चताओं को समझने हेतु इनके निदर्शों का अध्ययन अग्रपंक्तियों में करेंगे।

समायोजन पश्चता निदर्श (Adjustment Lag Model)

समायोजित पश्चता निदर्श अथवा पश्चतायुक्त-समायोजन निदर्श *(lagged-adjustment models)* के अन्तर्गत यह माना जाता है कि मूल्यों में परिवर्तन के फलस्वरूप ही किसान अपने उत्पादन स्तर का निर्धारण शनै शनै *(gradually)* करते हैं।

पूर्ण समायोजन करने के पश्चात् मानलो t समय में उपज हेतु क्षेत्रफल $A*_t$ है, जबकि पूर्व समयावधि $(t-1)$ के अन्तर्गत मूल्य P_{t-1}, अग्रिम समयावधि हेतु अपरिवर्तित रहना है। 'वास्तविक रोपित क्षेत्रफल' (A_t) के विपरीत $A*_t$ पूर्व 'वांछित रोपित क्षेत्रफल' (desired acreage planted) कहते हैं। $A*_t$ पूर्व समयावधि के मूल्य का फलन है। गणितीय (निदर्श) रूप में $A*_t$ को निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$A*_t = a + b P_{t-1} + U_t \qquad (5.1)$$

जहाँ $(P*_t = P_{t-1})$

जहाँ U_t = त्रुटि-पद

a, b = स्थिरांक

अब t समयावधि में वास्तविक रोपित क्षेत्रफल (A_t) एवं पूर्व समयावधि में रोपित क्षेत्रफल तथा वांछित क्षेत्रफल A_t एवं पूर्व समयावधि में रोपित वास्तविक क्षेत्रफल के मध्य अन्तर के β $(0 < \beta < 1)$ अनुपात के योग के बराबर है। अस्तु, परिकल्पना को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है

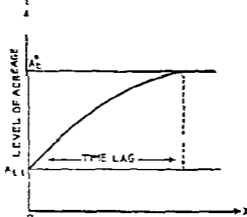
$$A_t = A_{t-1} + \beta (A*_t - A_{t-1}) + v_t$$

अथवा

$$A_t - A_{t-1} = \beta (A*_t - A_{t-1}) + v_t \qquad (5.2)$$

जहाँ v_t = त्रुटि-पद

β = समायोजन गुणांक

यहाँ हम A_{t-1} को $A*_t$ तक वृद्धि करना चाहते हैं, परन्तु इसमें तत्काल वृद्धि नहीं की जा सकती है। रेखाचित्र 5.1 द्वारा स्पष्ट है कि लक्ष्य $A*_t$ को प्राप्त करने में अधिक समय लगेगा, जहाँ β वांछित वृद्धि का एक भाग है।

समीकरण (5 2) को A^{*}_{t} के लिए हल किया जा सकता है

$$A_t - A_{t-1} = \beta (A_t - A_{t-1}) + v_t$$

अथवा

$$A_t - A_{t-1} = \beta A^{*}_{t} - \beta A_{t-1} + v_t$$

अथवा

$$A^{*}_{t} = \frac{1}{\beta} A_t - \frac{1-\beta}{\beta} A_{t-1} - \frac{1}{\beta} v_t \qquad (5\ 3)$$

A^{*}_{t} का मान समीक्रण (5 1) में रखने पर,

$$\frac{1}{\beta} A_t - \frac{1-\beta}{\beta} A_{t-1} - \frac{1}{\beta} v_t = a + bP_{t-1} + u_t \qquad (5\ 4)$$

समीकरण (5 4) को A_t के लिए हल करने हेतु, हमें प्राप्त होता है,

$$A_t = a\beta + P_{t-1} + (1-\beta) A_{t-1} + \beta u_t + v_t \qquad (5\ 5)$$

वास्तव में हम इस समीकरण का आकलन करना चाहते थे। यह समीकरण A^{*}_{t} से स्वतत्र है। यह समीकरण समन्वय पश्चता निदर्श हेतु पश्चतायुक्त समीकरण है। पश्चतायुक्त समीकरण (Lagged Equation) वह समीकरण है, जिसके अन्तर्गत पश्चतायुक्त प्रतिमान स्वतन्त्र चर के रूप में विद्यमान होते है। अस्तु, इस निदर्श हेतु सत्यापित समीकरण निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है

$$A_t = b_1 + b_2 P_{t-1} + b_3 A_{t-1} + e_t \qquad (5\ 6)$$

आकलित समीकरण (5 5) के साथ गुणाकों की तुलना द्वारा हमें b_1, b_2 *तथा* b_3 के आकलक प्राप्त होते हैं। फलस्वरूप

$$b_1 = a\beta,\ b_2 = b\beta,\ b_3 = (1-\beta),\ e_t = \beta u_t + v_t$$

अतएव, इन मानों को प्रतिस्थापित करने के उपरान्त A_t का आकलन किया जा सकता है। इस प्रकार के समीकरण को 'लघुकरणात्मक स्वरूप का समीकरण' (Reduced Form Equation) कहते हैं।

प्रत्याशित पश्चता निदर्श (Expectation Lag Model)

प्रत्याशित पश्चता निदर्श को अनुकूली (Adaptive Expectations Model) भी कहते हैं। इस निदर्श के अन्तर्गत वास्तविक रोपित क्षेत्रफल *(A_t)* को वास्तविक मूल्य का फलन न मानकर *प्रत्याशित मूल्य (P^{*}_{t})* का फलन माना जाता है। अस्तु, निदर्श को निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$A_t = a + bP^{*}_{t} + u_t \qquad (5\ 7)$$

यहाँ u_t = त्रुटि-पद

यहाँ समन्वय की समस्या उत्पन्न नहीं होती है। अब प्रश्न यह उत्पन्न होता है कि P_t को किस प्रकार निर्धारित किया जाय ? इसको पूर्वानुभव के आधार पर निर्धारित किया जा सकता है। यहाँ इस निदर्श की महत्त्वपूर्ण परिकल्पना निम्न प्रकार है

$$P_t = P_{t-1} + \lambda (P_{t-1} - P_{t-1}) \qquad (5.8)$$

यहाँ
$P_{t-1} = (t-1)$ समयावधि में प्रत्याशित मूल्य
$P_{t-1} = (t-1)$ समयावधि में वास्तविक मूल्य
λ = अनुकूलन गुणांक, $(0 < \lambda < 1)$

अर्थात् प्रत्याशित मूल्य का अनुकूलित करके वास्तविक मूल्य के अनुरूप करने का प्रयत्न किया जाता है। गुणांक λ का अनुकूलन गुणांक (Coefficient of adap ations) कहा जाता है।

यदि λ का मान शून्य के निकट होता है, तब प्रत्याशित मूल्य, मूल्य निष्पादन के सापेक्ष अनुकूलित किये जाते हैं। यदि λ का मान इकाई के निकटतम होता है, तब लगभग पूर्णरूपेण अनुकूलन है। अर्थात् t समयावधि में प्रत्याशित मूल्य लगभग $(t-1)$ समयावधि के वास्तविक मूल्य के बराबर है।

समीकरण (5.8) से P_t का मान समीकरण (5.7) में रखने पर,

$$A_t = a+b\,[P_{t-1}+\lambda\,(P_{t-1}-P_{t-1})] + u_t$$

अथवा

$$A_t = a+bP_{t-1}+b\lambda\,(P_{t-1}-P_{t-1}) + u_t$$
$$= a+b\,(1-\lambda)\,P_{t-1} + u_t \qquad (5.9)$$

यहाँ P_{t-1} एक 'प्रत्याशित मूल्य' है जिसका प्रेक्षण नहीं किया जा सकता है। अस्तु, समीकरण (5.9) का अनुभावयुक्त आकलन करने हेतु P_{t-1} को प्रेक्षण योग्य चरों के रूप में व्यक्त करना चाहिए। इसका रूपांतरण समीकरण (5.7) द्वारा निम्न प्रकार किया जा सकता है

$$A_t = a+bP_t+u_t$$

t के स्थान पर $(t-1)$ रखने पर,

$$A_{t-1} = a+bP_{t-1}+u_{t-1} \qquad (5.10)$$

P_{t-1} के लिए हल करने पर,

$$P_{t-1} = \frac{1}{b}A_{t-1} - \frac{a}{b} - \frac{1}{b}u_{t-1} \qquad (5.11)$$

समीकरण (5.11) से P_{t-1} का मान समीकरण (5.9) में रखने पर,

$$A_t = a+b(1-\lambda)\ \frac{1}{b} A_{t-1} - \frac{a}{b}\frac{1}{b} u_{t-1}\ \ +b\lambda P_{t-1}+u_t$$

$$= a+A_{t-1}-a-u_{t-1}+a\lambda+u_{t-1}+b\lambda P_{t-1}+u_t^*$$

अथवा

$$A_t = a\lambda+(1-\lambda)A_{t-1}+b\lambda P_{t-1}+[u_t-(1-\lambda)u_{t-1}] \qquad (5\ 12)$$

हमें इसी समीकरण की आवश्यकता थी। इस समीकरण का लघुकरणात्मक स्वरूप निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$A_t = b_1 + b_2 A_{t-1} + b_3 P_{t-1} + e_t \qquad (5\ 13)$$

समीकरण (5 12) तथा (5 13) की तुलना करने पर b_1, b_2, b_3 तथा e_t के मान आकलित प्राचलों के रूप में निम्न प्रकार है

$$b_1 = a\lambda,\ b_2 = (1-\lambda),\ b_3 = b\lambda \text{ तथा } e_t = u_t-(1-\lambda)\ u_{t-1}$$

अस्तु, समीकरण (5 13) में उपरोक्त मान रखने पर A_t का मान ज्ञात किया जा सकता है।

समायोजित एव प्रत्याशित पश्चता निदर्शों का संयोग
(Combinationoof Adjustment and Expectational Lag Models)

सयुक्त निदर्श की सरचना करने हेतु हम निम्न लिखित तीन महत्त्वपूर्ण समीकरणों का उपयोग करते है

$$A^*_t = a+bP^*_t \qquad (5\ 14)$$

(A^*_t तथा P^*_t दोनों प्रत्याशित मूल्य है)

$$A_t-A_{t-1} = \beta(A^*_t-A_{t-1}) \qquad (5\ 15)$$

(समन्वय निदर्श की परिकल्पना)

$$P^*_t - P^*_{t-1} = \lambda\,(P_{t-1} - P^*_{t-1}) \qquad (5\ 16)$$

(प्रत्याशित निदर्श की परिकल्पना)

समीकरण (5 14) से

$$A^*_t = a+bP^*_t$$

तथा

$$A^*_{t-1} = a+bP^*_{t-1}) \qquad (5\ 17)$$

$$A^*_t - A^*_{t-1} = b\,(P^*_t-P^*_{t-1}) \qquad (5\ 18)$$

समीकरण (5 16) से $P^*_t - P^*_{t-1}$ का मान रखने पर हमें प्राप्त होता है,

$$A^*_t - A^*_{t-1} = b\lambda (P_{t-1} - P^*_{t-1}) \qquad (5\ 19)$$

पुन. समीकरण (5 17) से P^*_{t-1} का मान रखने पर प्राप्त होता है,

$$A^*_t - A^*_{t-1} = b\lambda \left[P_{t-1} - \left(\frac{A^*_{t-1} - a}{b}\right)\right]$$

$$= b\lambda P_{t-1} - \lambda\ (A^*_{t-1} - a)$$

अथवा
$$A^*_t - (1-\lambda) A^*_{t-1} = a\lambda P_{t-1} \qquad (5\ 20)$$

अब, समीकरण (5 15) की सहायता द्वारा,

$$A_t - A_{t-1} = \beta (A^*_t - A_{t-1}) = \beta A^*_t - A_{t-1}$$

अथवा
$$\beta A^*_t = A_t - A_{t-1} + \beta A_{t-1}$$

अथवा
$$A^*_t = \frac{1}{\beta} [A_t - (1-\beta) A_{t-1}] \qquad (5\ 21)$$

t के स्थान पर $(t-1)$ रखने पर हमें प्राप्त होता है,

$$A^*_{t-1} = \frac{1}{\beta} [A_{t-1} - (1-\beta) A_{t-2}]$$

दोनों ओर $(1-\lambda)$ से गुणा करने पर,

$$(1-\lambda) A^*_{t-1} = \frac{(1-\lambda)}{\beta} [A_{t-1} - (1-\beta) A_{t-2}] \qquad (5\ 22)$$

समीकरण (5 21) तथा (5 22) के मान (5 20) में रखने पर प्राप्त होता है,

$$A^*_t - (1-\lambda) A^*_{t-1} = a\lambda + b\lambda P_{t-1}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\beta} [A_t - (1-\beta) A_{t-1}] - \frac{(1-\lambda)}{\beta} [A_{t-1} - (1-\beta) A_{t-2}]$$

$$= a\lambda + b\lambda_{t-1}$$

अथवा
$$\frac{A_t}{\beta} - \frac{(1-\beta)}{\beta} A_{t-1} - \frac{(1-\lambda)}{\beta} A_{t-1} = a\lambda + b\lambda P_{t-1} -$$

$$\frac{(1-\lambda)(1-\beta)}{\beta} A_{t-2}$$

अथवा $A_t -[(1-\beta)+(1-\beta)A_{t-1}] = a\lambda\beta+b\lambda\beta P_{t-1}$

$-(1-\lambda)(1-\beta)A_{t-2}$

अथवा $A_t = a\lambda\beta+b\lambda\beta P_{t-1} + 1(\lambda-\beta)A_{t-1} -(1-\lambda)(1-\beta)A_{t-2}$

(5 23)

समीकरण (5 23) के द्वारा निदर्श का वास्तविक समीकरण निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$A_t = b_1+b_2P_{t-1}+b_3A_{t-1}+b_4A_{t-2} \quad (5\ 24)$$

यह लघुकरणात्मक स्वरूप का समीकरण है।

समीकरण (5 23) तथा (5 24) की तुलना करने पर अज्ञात समाश्रयण गुणाकों के मान निम्नलिखित रूप में प्राप्त करते हैं

$b_1 = a\lambda\beta,\ b_2 = b\lambda\beta\ \ b_3 = (\lambda)$, तथा $b_4 - (1-\lambda)(1-\beta)$

यद्यपि हमने पश्चता निदर्शों को एक फसल के रोपित क्षेत्रफल के पदों में ही व्यक्त किया है, परन्तु इस प्रकार के निदर्श अर्थमितीय शोध में सामान्यत पाये जाते है। उदाहरणार्थ, "फ्रीडमैन स्थायी-आय परिकल्पना" (Friedman Permanent Income Hypothesis) को पश्चता निदर्श के पदों में व्युत्पादित किया जा सकता है। सामान्य रूप में स्व समाश्रयणीय निदर्श में कई प्रश्चता आश्रित चर हो सकते हैं। इस निदर्श को सामान्य रूप में निम्न प्रकार लिख सकते है

$$Y_t = a_o+a_1 X_1 + \quad +a_kX_k + b_1Y_{t-1} + b_2Y_{t-1} + \quad + b_sY_{t-s} + e_t \quad (5\ 25)$$

यहाँ s स्वसमाश्रयण का क्रम है।

पश्चता निदर्श के अन्तर्गत अभिनति (Bias in Lag Models)

पश्चता निदर्श में त्रुटि पद की समस्त मान्यताएँ पूर्ण नहीं होती है।[1] विशेष रूप में, स्वतन्त्र चर $Y_{t-1}, Y_{t-2}\ \ , Y_{t-s}$ यादृच्छिक (Random) होते हैं तथा ये पश्चता त्रुटि पद $e_{t-1}, e_{t-2}, \ \ e_{t-s}$ से क्रमश सहसम्बन्धित (Correlated) होते हैं। अतएव गुणाकों

1 त्रुटि पद की मुख्य मान्यताएँ निम्नलिखित हैं

(i) $E(e_t) = 0$,

(ii) $E(e_t e_{t-s}) = 0$, if $s \neq 0$ तथा

(iii) $E(e_t e_{t-s}) = \delta_e^2$, if $s = 0$

a तथा b के आकलित मान (समीकरण 5 25) है। यद्यपि ये सगत है, तथापि अनभिनत है, यदि त्रुटि पद की अन्य मान्यताएँ पूर्ण होती है।

पुनश्च , प्रत्याशित निदर्श के अन्तर्गत सामान्यत त्रुटि पद की अन्य मान्यताएँ पूर्ण नहीं हो पाती है। इसके लिए हम समीकरण (5 12) का अवलोकन करते हैं,

$$A_t = a\lambda + (1-\lambda) A_{t-1} + b\lambda P_{t-1} + [u_t-(1-\lambda) u_{t-1}]$$

यहाँ चर A_{t-1} त्रुटि-पद u_{t-1} पर निर्भर करेगा, जैसाकि समीकरण (5 10) द्वारा स्पष्ट है, अर्थात

$$A_{t-1} = a+bP^*_{t-1}-u_{t-1}$$

त्रुटि पद $e_t = u_t - (1-\lambda) u_{t-1}$ भी u_{t-1} पर निर्भर करता है। अतएव स्वतन्त्र चर A_{t-1} समकालीन त्रुटि-पद e_t तथा पश्चता त्रुटि पद e_{t-1}, e_{t-2} आदि से भी सह सम्बन्धित है।

इस स्थिति में, समाश्रयण समीकरण के गुणाकों के न्यूनतम वर्ग आकलन असगत (Incosistent) तथा अभिनत (Biased) होते हैं। अतएव सामान्य रूप में, प्रत्याशित पश्चता निदर्श अथवा अनुकूली प्रत्याशित निदर्श द्वारा समाश्रयण प्रकार के असगत तथा अभिनत आकलक प्राप्त होते हैं। समन्वय पश्चता निदर्श में, न्यूनतम वर्ग आकलक अभिनत तथा सगत है।

पुन , अग्रिम अध्यायों में यह अध्ययन किया जायेगा कि त्रुटि पदों में क्रमिक सहसम्बन्ध (Serial correlation) द्वारा ही न्यूनतम वर्ग आकलक को अभिनत नहीं करते हैं, यद्यपि वे अदक्ष (Inefficient) होते है। यदि त्रुटि पदों में क्रमिक सहसम्बन्ध हो तथा समीकरण में पश्चता आश्रित चर हो तब न्यूनतम वर्ग आकलक अभिनत तथा असगत होते हैं। यह दोनों निदर्शों-समन्वय पश्चता निदर्श तथा प्रत्याशित पश्चता निदर्श के सम्बन्ध में सत्य है।

वितरित पश्चता निदर्श
(Distributed Lag Model)

हमने उन पश्चता निदर्शों का अध्ययन किया है, जिनके समीकरण में आश्रित चर के मान पश्चतायुक्त होते हैं इनके विपरीत अर्थमितीय शोध के अन्तर्गत प्राय ऐसे निदर्श भी होते हैं, जिनके समीकरण में स्वतन्त्र चरों के मान पश्चतायुक्त होते हैं। उदाहरणार्थ, निम्नांकित प्रकार के उपभोग फलन को वितरित पश्चता निदर्श (Distributed Lag Model) कहते हैं

$$C_t = b_o+b_1 Y_t+b_2Y_{t-1} + b_3 Y_{t-2} \quad (5\ 26)$$

यहाँ C_t = t समयावधि में उपभोग
Y_t = t समयावधि में आय
Y_{t-1} = (t–1) समयावधि में आय
Y_{t-2} = (t–2) समयावधि में आय

इन निदर्शों का उदय प्राय उन परिस्थितियों में ही होता है जिनमें पश्चता निदर्श अथवा समाश्रयणीय निदर्श उत्पन्न होते है, अर्थात् जब समायोजन शीघ्रतापूर्वक नहीं हो सकते है अथवा विद्यमान समयावधि में प्रत्याशित मान स्वतन्त्र चरों के पूर्ववर्ती मानों पर निर्भर करते है। वास्तव में, पश्चता निदर्श को सदैव वितरित पश्चता के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ हम समन्वय पश्चता निदर्श को प्रस्तुत करते है।

$$A_t = a\beta + b\beta P_{t-1} + (1-\beta) A_{t-1} - \beta u_{t-1} - \beta u_t + v_t \qquad (1)$$

(समन्वय निदर्श का लघुकरणात्मक समीकरण)

$(t-1)$ के पदों में,

$$A_{t-1} = a\beta + b\beta P_{t-2} + (1-\beta) A_{t-2} + \beta u_{t-1} + v_{t-1}$$

समीकरण (1) में A_{t-1} का मान रखने पर प्राप्त होता है,

$$A_t = a\beta + b\beta P_{t-1} + (1-\beta)\,[a\beta + b\beta P_{t-2} + (1-\beta) A_{t-2} + \beta u_{t-1} + v_{t-1}] + \beta u_t + v_t$$

$$= a\beta[1+(1-\beta)] + b\beta P_{t-1} + b\beta(1-\beta) P_{t-2} + (1-\beta)^2 A_{t-2} + [(\beta u_t + v_t) + (1-\beta)(\beta u_{t-1} + v_{t-1})] \quad (5\ 28)$$

इस प्रक्रिया को बार-बार किया जा सकता है अर्थात् समीकरण (1) को $(t-2)$ के पदों में व्यक्त करने के पश्चात् A_{t-2} का मान समीकरण (5 28) में रखते है, तत्पश्चात् A_{t-3} का मान रखने पर, आदि आदि। यदि इस प्रक्रिया की s बार पुनरावृत्ति की जाये तो हमें निम्नांकित समीकरण प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} A_t = {} & [1+(1-\beta)+(1-\beta)^2 + \quad + (1-\beta)^s]\, a\beta \\ & + b\beta P_{t-1} + b\beta(1-\beta) P_{t-2} + \quad + b\beta(1-\beta)^s P_{t-s-1} \\ & + (\beta u_t + v_t) + (1-\beta)(\beta u_{t-1} + v_{t-1}) \\ & + (1-\beta)^s (\beta u_{t-s} + v_{t-s}) + (1-\beta)^s A_{t-s} \end{aligned} \qquad (5\ 29)$$

चूंकि $(1-\beta) < 1$ (क्योंकि $< \beta < 1$)

अतएव समीकरण (5 29) के अन्तिम पद $(1-\beta)^s A_{t-s}$ का मान s के मान में वृद्धि के साथ कम होगा। अर्थात् शून्य की ओर प्रवृत्त होगा। यदि इस पद की अवहेलना की जाये, तब समीकरण (5 29) शुद्ध वितरित पश्चता निदर्श है।

इसी प्रकार प्रत्याशित पश्चता निदर्श (5 12) को वितरित पश्चता निदर्श में रूपान्तरित किया जा सकता है। परिणामस्वरूप हमें निम्नांकित समीकरण प्राप्त होता है

$$A_t = [1+(1-\lambda)+(1-\lambda)^2+ \quad +(1-\lambda)^r]\,a\lambda)P_{t-1}$$
$$+ b\lambda(1-\lambda)P_{t-2}+ \quad +b\lambda(1-\lambda)^r P_{t-r-1}$$
$$+u_t-(1-\lambda)^r u_{t-1}+(1-\lambda)^r A_{t-r} \qquad (5\ 30)$$

चूँकि $(1-\lambda)<1$, क्योंकि $0<\lambda<1$)

अतएव अन्तिम पद $(1-\lambda)^r A_{t-r}$ का मान शून्य की ओर प्रवृत्त होगा। इस पद का परित्याग करने पर समीकरण (5 30) शुद्ध वितरित पश्चता निदर्श है।

समन्वय पश्चता निदर्श के वितरित पश्चता रूपान्तर (5 29) तथा प्रत्याशित पश्चता निदर्श के वितरित पश्चता रूपान्तर (5 30) में मुख्य अन्तर निम्नांकित है

समन्वय पश्चता निदर्श के अन्तर्गत त्रुटि पद में क्रमिक सह-सम्बन्ध होता है, यद्यपि त्रुटिपद u_t तथा v_t में क्रमिक सहसम्बन्ध नहीं होता है। प्रत्याशित पश्चता निदर्श के अन्तर्गत, यदि त्रुटि पद u_t में क्रमिक सहसम्बन्ध न हो तब समीकरण (5 30) के त्रुटि पद में भी क्रमिक सहसम्बन्ध नहीं होता है।

वितरित पश्चता को अनेक रूपों में व्यक्त किया जा सकता है, परन्तु निम्नांकित तीन मुख्य हैं

(i) गुणोत्तर पश्चता (Geometric Lag)
(ii) पास्कल पश्चता [Pascal Lag)
(iii) बहुपद पश्चता (Polynomial Lag)

वितरित पश्चता निदर्श (5 29) तथा (30) वितरित पश्चता निदर्श के विशेष रूप हैं, जिनको 'गुणोत्तरी ह्रासमान वितरित पश्चता निदर्श' (Geometrically Declining Distributed Lag Models) कहते है। जिस प्रकार पश्चता में वृद्धि होती है, उसी प्रकार पश्चता कीमत चर को गुणाक के गुणोत्तरीय रूप में कारक $(-\beta)$ की दर से कमी होती है।

वितरित पश्चता निदर्शों को गुणोत्तर रूप में एल एम कोयक (L M. Koyck) द्वारा व्यक्त किया गया है।

वितरित पश्चता निदर्श का द्वितीय रूप भी है, जिसको पास्कल पश्चता (Pascal Lag) कहते हैं। जिन स्थितियों में, गुणोत्तर निदर्श सम्भव नहीं हो सकता, वहाँ पास्कल निदर्श की सरचना की जा सकती है। यदि गुणाकों के सलग्न भारों में पूर्व वृद्धि तथा तत्पश्चात् ह्रास होने पर भारों (weights) के इस वितरण को 'प्रतिलोमित v पश्चता वितरण' (Inverted V-lag Distribution) कहते हैं।

वितरित पश्चता निदर्श का तृतीय अथवा सामान्य रूप 'बहुपद पश्चता' (Polynomial Lag) है

$$Y_t = a + b_1 X_t + b_2 X_{t-1} + \quad + b_s X_{t-s} + e_t \qquad (5\ 31)$$

यहाँ a = स्थिरांक

$b_1, b_2, \quad, b_s$ = वितरीत पश्चता गुणांक

6

भारतीय आयोजन निदेशों की व्यूह रचना
(Strategy of Indian Planning Models)

आयोजन की व्यूह रचना (Strategy)[1] सम्भव आर्थिक लक्ष्यो तथा चयनित (selected) विकास पथ का स्पष्टीकरण है, जोकि न्यूनतम लागत पर किया जा सकता है। व्यूह रचना के निर्धारण मे क्षेत्रीय आगत-निर्गत व्यूह की रचना करना गौण कार्य है, जिसके द्वारा अर्थव्यवस्था के वर्तमान उत्पादन तथा पूँजी गुणाकों को प्रस्तुत किया जा सकता है तथा जिसके अन्तर्गत समस्त विकास चर साख्यिकीय रूप से निर्धारित होते है।

विगत वर्षों में भारतीय आयोजकों द्वारा अपनाई गई विकास की व्यूह -रचना के विषय में अत्यधिक वाद-विवाद होता रहा है।विभिन्न व्यक्तियों द्वारा इसके भिन्न-भिन्न अर्थ प्रस्तुत किये गये हैं। व्यूह रचनाओं को दीर्घकालीन योजनाओं से सम्बन्धित किया गया है। इस सन्दर्भ में, व्यूह रचना प्रमुख उद्देश्यों के अभिज्ञान (Identification) तथा निश्चित प्रमुख प्रतिबन्धों पर आधारित एक निवेश प्रक्रमन (Investment programme) है। अर्थात्, व्यूह रचना उपायों व सामान्य रूप से प्राथमिकताओं का वह क्रम है, जोकि इच्छित लक्ष्यों को प्राप्त करने हेतु अपनाया जाता है। आर्थिक विकास के उद्देश्यों को स्पष्ट रूप से निर्धारित करने के पश्चात् उद्देश्यों की प्राथमिकता तथा गौणता को क्रमानुसार निश्चित करने हेतु व्यूह रचना को परिभाषित किया जा सकता है। भारतीय आयोजन की व्यूह रचना भारतीय योजनाओं में निहित मौलिक चयनों द्वारा व्यक्त होती है। ये चयन आवश्यक रूप से किसी विशिष्ट योजना के लिए न होकर अपेक्षाकृत दीर्घकालीन अवधियों के सन्दर्भ में प्रयुक्त होते हैं। वास्तविकता यह है कि, व्यूह रचना में निवेश के प्रारूप (Pattern of investment) विशेष महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि इसी के द्वारा निर्धारित उद्देश्यो व प्राथमिकताओं को दृष्टिगत रखते हुये विशिष्ट प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अर्थव्यवस्था विकास के मार्ग पर अग्रसर होती है। वे सस्थागत चयन भी जो कि योजना की रूपरेखा प्रस्तुत करते है, व्यूह रचना में सम्मिलित किये जा सकते

1 'Strategy' के लिये, 'मूलभूत नीति', रणनीति', आधारभूत चाल' आदि शब्दों का प्रयोग भी किया जाता है।

हैं। उदाहरणार्थ, विकास की मिश्रित अर्थ-व्यवस्था प्रणाली की स्वीकारोक्ति। प्रगति की दिशा निर्धारित करने हेतु 'समाजवादी ढग के समाज' के प्रारूप का समावेश भी हो चुका है। स्मरणीय है कि भारतीय आयोजन की व्यूह रचना द्वितीय योजना के प्रारम्भ में निर्धारित की गयी थी जो बाद में पर्याप्त सुदृढ़ प्रमाणित हुई।

प्रथम योजना सम्बन्धी विकास निदर्श
(Growth Model of First Plan)

प्रथम पचवर्षीय योजना को एक योजना नहीं माना जाता है। यह योजना उन विभिन्न नीतियों का समुच्चय मात्र थी, जोकि युद्ध एव विभाजन की परिस्थितियों द्वारा उत्पन्न अर्थव्यवस्था के नवीन असन्तुलनों के निवारणार्थ प्रस्तुत की गई थी। इस योजना में विकास हेतु किसी प्रकार की स्पष्ट व्यूह रचना तथा पद्धति निर्धारित नहीं की गई थी। मूलत प्रथम पचवर्षीय योजना उन विभिन्न परियोजनाओं (Projects) तथा प्रक्रमों से सम्बन्धित थी जो कि पहले ही प्रारम्भ हो चुके थे अथवा परिनिरीक्षा (scrutiny) के प्रारम्भिक चरणों को पार कर चुके थे। इस योजना में कृषि तथा सिंचाई के विकास पर अधिक बल दिया गया था। इस योजना के अन्तर्गत परिवहन, कपास एव जूट उद्योग (जोकि विभाजन के परिणामस्वरूप अत्यधिक प्रभावित हुये थे) के विकास को भी दृष्टिगत रखा गया था।

आयोजकों द्वारा निर्धारित मौलिक मान्यताओं को भी इस योजना की रूपरेखा के अन्तर्गत व्यक्त किया गया था। इन मान्यताओं का अध्ययन हैरॉड-डोमर प्रकार के विकास निदर्श द्वारा सुगमतापूर्वक किया जा सकता है। इसके अन्तर्गत आयोजकों ने बचत को सबसे प्रमुख चर माना है। मूल समीकरण निम्नलिखित है

$$Y_t = y_0\left(1+\frac{s}{v}\right)^t$$

यहाँ s/v = विकास दर = g

s = बचत दर

v = पूँजी गुणाक (पूँजी-निर्गत अनुपात)

इस निदर्श की निम्नांकित तीन मान्यताएँ हैं

(1) $K = vY$

यहाँ K = पूँजी स्टॉक

Y = राष्ट्रीय निर्गत (अथवा राष्ट्रीय आय)

अथवा $Y = K/v$

इस समीकरण को उत्पादन फलन कहते हैं, क्योंकि इसके द्वारा निर्गत तथा उत्पादन के साधनों (पूँजी) का सम्बन्ध ज्ञात होता है।

(ii) $$I = \frac{dk}{dt} = sY$$

यहाँ I = निवेश

s = बचत की दर

यहाँ यह मान लिया गया है कि निवेश पूँजी सम्पत्ति में हुई वृद्धि के बराबर है।

(iii) $$L = L_o e^{nt}$$

यहाँ L = वर्तमान श्रम-शक्ति

L_o = प्रारम्भिक श्रम -शक्ति

n = श्रम शक्ति की स्वाभाविक विकास दर

यहाँ यह मान लिया गया है कि श्रम शक्ति में घाताकी (exponentially) रूप से वृद्धि होती है।

समीकरण अथवा मान्यता (iii) से

$$L = L_o e^{nt}$$

दोनों ओर लघु (*log*) लेने पर,

$$log\ L = log\ L_o + nt$$

$$\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = n$$

अथवा $$\frac{\dot{L}}{L} = n$$ यहाँ $\frac{dL}{dt} = \dot{L}$

$\frac{\dot{L}}{L}$ को श्रम की वृद्धि-दर कहते हैं।

इसी प्रकार, $\frac{\dot{K}}{K}$ पूँजी की वृद्धि-दर है तथा $\frac{\dot{Y}}{Y}$ निर्गत की वृद्धि-दर है। अतएव समीकरण (*i*) से

$$K = vK$$

अथवा $$\frac{dK}{dt} = v\frac{dY}{dt}$$

अथवा $$\dot{K} = v\dot{Y}$$

अथवा $$sY = v\dot{Y} \qquad \dot{K} = \frac{dK}{dt} = I = sY$$

अथवा $$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{s}{v} = g \text{ (विकास की अभीष्ट दर)}$$

इस प्रकार की परिस्थिति में हम निम्न प्रकार का सम्बन्ध स्थापित कर सकते है

$$Y = Y_o e^{rt}$$

अर्थात् आय मे वृद्धि भी घातांकी रूप में है।

इसी प्रकार, $K = K_o e^{rt}$ द्वारा यह निष्कर्ष प्राप्त हो सकता है कि पूँजी में भी वृद्धि घातांकीय रूप में होती है।

इस निदर्श के अनुसार, अर्थव्यवस्था का विकास बचत की उत्पादकता तथा बचत की औसत दर *(s)* पर निर्भर करता है। यह कथन उस स्थिति में भी उपयोगी है, जबकि बचत की औसत दर *(ARS)* बचत की सीमांत दर *(MRS)* के बराबर नहीं हो, अपितु *MRS > ARS*, यहाँ विकास दर *(g)* की प्रमुख निर्धारक बचत की सीमांत दर होता है।

इस ढाँचे (Frame work) के अन्तर्गत आयोजकों ने गणितीय सहायता द्वारा वर्षों की संख्या ज्ञात करने का प्रयास किया, जिसमें राष्ट्रीय आय तथा प्रति व्यक्ति आय म दो गुनी वृद्धि की जा सके। इस सन्दर्भ में प्रमुख मान्यता जनसंख्या वृद्धि की दर से सम्बद्ध थी। जनसंख्या की दर 1.4 प्रतिशत मानी गई थी। बचत की सीमान्त दर को 20 प्रतिशत माना गया था। यदि किसी निश्चित समय में प्रति व्यक्ति आय को दो गुना करने का उद्देश्य हो, अर्थात् *t* ज्ञात हो तथा साथ- साथ Y_t एवं Y_o भी दिये हुए हों तब मूल समीकरण $Y_t = Y_o \left(1+\frac{s}{v}\right)^t$ के अन्तर्गत केवल बचत की सीमांत दर *(s)* अज्ञात है। अतएव आयोजकों ने परिकलन (Calculated) किया कि विकास दर *(g)* में तीव्र गति से वृद्धि करने हेतु बचत की सीमांत दर को कम से कम 35 प्रतिशत करने का प्रयास किया जाना चाहिये।

परन्तु इस प्रणाली द्वारा भी बचत को निवेश में परिवर्तित करने की कल्पना को साकार नहीं किया जा सका, जिसके परिणामस्वरूप पूँजी निर्माण में वृद्धि हुई। अविकसित देशों में बचत हेतु, विदेशी पूँजी की आवश्यकता होती है। विदेशी पूँजी को बचत की सीमांत दर में वृद्धि करके विद्यमान नहीं रखा जा सकता परन्तु इसके लिये अत्यधिक निर्यात आवश्यक है, जिसके विषय में आयोजक उस समय अज्ञान थे क्योंकि आयात के लिये पर्याप्त मात्रा में स्टर्लिंग सन्तुलन (Sterling balances) विद्यमान था।

भारतीय आयोजन हेतु महालनोबिस निदर्श
(Mahalanobis Models of Indian Planning)

प्रथम पंचवर्षीय योजना के अन्त में, सुप्रसिद्ध महालनोबिस निदर्श का प्रतिपादन किया गया। इस निदर्श का उपयोग द्वितीय तथा तृतीय पंचवर्षीय योजनाओं के प्रतिपादन हेतु स्वीकार किया गया। वास्तविकता यह है कि महालनोबिस निदर्श की सहायता द्वारा द्वितीय पंचवर्षीय योजना के अन्तर्गत विकास की व्यूह रचना निर्धारित करने का प्रयास किया गया, जिसके द्वारा योजना को आर्थिक विकास के दीर्घकालीन परिप्रेक्ष्य से सम्बन्धित किया जा सके। तृतीय

योजना के अन्तर्गत इस व्यूह रचना का विस्तार तथा उन्नति हुई। विकास हेतु व्यूह-रचना की प्रकृति इच्छित उद्देश्यों पर निर्भर करती है।

भारतीय पचवर्षीय योजनाओं का मूल उद्देश्य, विशेषतया द्वितीय तथा तृतीय योजना का समाजवादी ढंग के समाज की स्थापना करना था जिसके फलस्वरूप तीव्रगति से आर्थिक विकास किया जा सके, रोजगार के साधनों में वृद्धि की जा सके आय तथा सम्पत्ति की असमानता में कमी की जा सके तथा आर्थिक शक्ति के केन्द्रीयकरण को रोका जा सके। इन उद्देश्यों की प्राप्ति हेतु आयोजित आर्थिक विकास की मूलभूत नीति को विस्तृत किया गया। यह मूलभूत नीति, मूलरूप से महालनोबिस निदर्श पर आधारित थी। महालनोबिस निदर्श द्वारा यह व्यक्त होता है कि विकास दर में तीव्र गति से वृद्धि करने हेतु बचत प्रमुख निर्धारक नहीं है, परन्तु उपभोक्ता वस्तुओं तथा पूँजीगत वस्तुओं के क्षेत्रों के ज्ञात निर्गत गुणाकों पर आधारित निवेश का आवंटन मुख्य निर्धारक है। पूँजीगत वस्तुओं पर जितना आनुपातिक व्यय अधिक होगा उतनी ही विकास की दर में वृद्धि होगी। प्रारम्भ में विकास की दर कम हो सकती है, परन्तु पूँजीगत वस्तुओं पर व्यय में वृद्धि के फलस्वरूप दीर्घकाल के पश्चात् विकास की दर में अधिक त्वरित वृद्धि हो जायेगी।

मूलत महालनोबिस निदर्श में दो क्षेत्र सम्मिलित है

(i) पूँजीगत वस्तु क्षेत्र (K- goods sector)

(ii) उपभोग वस्तु क्षेत्र (C-goods sector)

प्रो महालनोबिस ने पूँजीगत वस्तु क्षेत्र के अन्तर्गत निवेश की दर को अधिक महत्त्वपूर्ण माना है। उपभोग-क्षेत्र को तीन क्षेत्रों में विभाजित करके इस निदर्श को चार-क्षेत्र निदर्श में परिवर्तित किया गया।

हैरॉड-डोमर निदर्श द्वारा महालनोबिस समीकरण का व्युत्पादन (Derivation of Mahalanobis Equation from Harrod-Domar Model)

प्रो महालनोबिस ने हैरॉड-डोमर निदर्श को आधार मानकर अपने निदर्श का व्युत्पादन किया। अतएव महालनोबिस निदर्श हैरॉड-डोमर निदर्श की अपेक्षा अधिक अग्रिम है। हैरॉड-डोमर निदर्श का सन्तुलन समीकरण निम्नांकित है

$$I = sY$$

अथवा $\Delta I_t = s \Delta Y_t$

यहाँ I = निवेश

s = बचत की दर

Y = सम्पूर्ण उत्पादन

यदि $a = s$, तब

$$\Delta I_t = a \Delta Y_t$$

अथवा
$$\frac{\Delta I_t}{I_o} = \frac{\alpha}{\alpha_o} \frac{\Delta Y_t}{Y_o}$$

यहाँ मान्यतानुसार,

$$I_o = \alpha_o Y_o$$

= निरपेक्ष पदों में प्रारम्भिक निवेश

अथवा
$$\frac{\Delta Y_t}{Y_o} = \frac{\alpha_o}{\alpha} \frac{\Delta I_t}{I_o}$$

अथवा
$$\frac{Y_t - Y_o}{Y_o} = \frac{\alpha_o}{\alpha} \frac{I_t - I_o}{I_o}$$

अथवा
$$\frac{Y_t - Y}{Y_o} = \frac{\alpha_o}{\alpha} \frac{I_t}{I_o} - 1$$

$$= \frac{\alpha_o}{\alpha} [(1+\alpha\beta)^t - 1]$$

यहाँ
$$\frac{I_t}{I_o} = (1+\alpha\beta)^t$$

तथा
$1/\beta$ = पूँजी-निर्गत अनुपात

अथवा
$$Y_t - Y_o = \frac{\alpha_o}{\alpha} Y_o [(1+\alpha\beta)^t - 1]$$

अथवा
$$Y_t = Y_o + \frac{\alpha o}{\alpha} Y_o [(1+\alpha\beta)^t - 1]$$

अथवा
$$Y_t = Y_o [1 + \frac{\alpha_o}{\alpha} \{(1+\alpha\beta)^t - 1\}] \qquad (6\ 1)$$

समीकरण (6 1) हैरॉड-डोमर निदर्श का विकास पथ अथवा महालनोबिस एक क्षेत्र निदर्श का समीकरण है।

प्रथम पचवर्षीय योजना में इसी समीकरण का उपयोग किया गया था। इस समीकरण से सम्बन्धित चरों के मान निम्न प्रकार लिये गये थे

$g = 1/60 = 1\ 67\%$ (विकास की दर)
$\alpha = 1/20 = 5\%$ (बचत की दर)

$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{1/3} = 3\ 1$ (पूँजी निर्गत अनपात)

हमारा उद्देश्य निम्नलिखित वृद्धि करना था

$$g = 1/25 = 4\%$$
$$\alpha = 1/5 = 20\%$$
β = अपरिवर्तित।

उपर्युक्त व्याख्या द्वारा हम यह निष्कर्ष प्राप्त करते है कि पूँजी निमार्ण में अतिरिक्त आय के $2/3$ भाग के उपयोग के फलस्वरूप 22 वर्ष की समयावधि मे राष्ट्रीय आय में लगभग 1 61% वृद्धि की जा सकती है तथा प्रति व्यक्ति आय को दुगुना किया जा सकता है परन्तु इससे बचतकर्ता अथवा उपभोग वस्तुओं पर असाधारण भार पडेगा। अतएव यह निश्चय किया गया कि पूँजी-निर्माण मे अतिरिक्त आय के 2/3 भाग से कम का उपयोग किया जाये (अर्थात् 25 प्रतिशत किया जाये) जिसके परिणामस्वरूप उसी 22 वर्ष समयावधि में राष्ट्रीय आय में 80% वृद्धि हो सके।

प्रथम पचवर्षीय योजन में बचत की दर प्रत्येक क्षेत्र के लिये समान मान ली गई थी। परन्तु यदि इस मान्यता की अवहेलना की जाये कि 'बचत की औसत प्रवृत्ति तथा बचत की सीमात प्रवृत्ति बराबर है' तब विभिन्न क्षेत्रों की बचत दर भिन्न-भिन्न होंगी। महालनोबिस निदर्श में इसी मत को व्यक्त किया गया है। प्रो महालनोबिस ने पूँजीगत वस्तु क्षेत्र तथा उपभोग वस्तु क्षेत्र के लिये भिन्न-भिन्न दरें परिभाषित की जिसके फलस्वरूप सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था को दो क्षेत्रों में विभाजित किया गया।

अब बचत की दर निम्न प्रकार है

$$\alpha = \frac{\lambda_k \beta_k}{\lambda_k \beta_k + \lambda_c \beta_c} \qquad (6\ 2)$$

यहाँ $\beta = \beta_k + \beta_c$

$\lambda_k \beta_k$ = K वस्तु क्षेत्र में बचत का अनुपात

$\lambda_c \beta_c$ = C वस्तु क्षेत्र में बचत का अनुपात

महालोनोबिस ने $\beta_k\ \lambda_k$ को $\beta_c\ \lambda_c$ से अधिक माना है

(अर्थात् $\beta_k \lambda_k > \beta_c \lambda_c$)

प्रथम पचवर्षीय योजना के समीकरण (6 1) में α का मान रखने पर हमें महालनोबिस का मूल समीकरण प्राप्त होता है, जिसका उपयोग द्वितीय पचवर्षीय योजना में किया गया था

$$Y_t = Y_o\ 1 + \alpha_o\ (\frac{\lambda_k\beta_k + \lambda_c\beta_c}{\lambda_k\beta_k})\ \{(1+\beta_k\lambda_k)^t - 1\} \qquad (6\ 3)$$

समीकरण (6 3) महालनोबिस निदर्श का विकास पथ है।

यदि β_k तथा β_c को तकनीकी रूप से स्थिर मान लिया जाये तब आय वृद्धि की दर α_0, λ_k तथा λ_c पर निर्भर करेगी।

पुन यदि α_o को निश्चित मान लिया जाये तब नीति यत्र (Policy instrument) केवल λ_k होगा (क्योंकि $\lambda_k + \lambda_c = 1$) अतएव λ_c का निर्धारण स्वयमेव हो जायेगा)। λ_k के उच्च मानों के साथ विकास पथ उच्च होगा तथा निम्नतर मानों के साथ निम्न होगा।

उपर्युक्त परिणाम कुछ आश्चर्यजनक प्रतीत होता है, परन्तु समुचित रूप से अध्ययन द्वारा ज्ञात होता है कि यह सम्बन्ध इस तथ्य पर बल देता है कि अर्थव्यवस्था में सुधार करने हेतु अधिक पूँजी उत्पन्न करने के लिये कुछ पूँजी का होना आवश्यक है। इस सदर्भ में प्रो महालनोबिस का कथन है कि यद्यपि पूँजीगत वस्तु क्षेत्र में निवेश की उत्पादकता C वस्तु क्षेत्र में निवेश की उत्पादकता की अपेक्षा कम है, तथापि K वस्तुओं के उत्पादन में समस्त निवेश का अधिकतम भाग, दीर्घकाल में, आय का उच्चतर स्तर प्रदान करता है, क्योंकि निवेश का जितना अधिक भाग पूँजीगत वस्तु क्षेत्र को आवटित होगा, उतनी ही अधिक बचत की सीमात दर होगी अर्थात $\lambda_k > \lambda_c$ यहाँ λ_k तथा λ_c (भिन्न के रूप में) निवेश के भाग हैं।

दो क्षेत्रों में पूँजी निर्गत अनुपात के विषय में ग्राहय मान्यताओं के आधार पर प्रो महालनोबिस ने यह निष्कर्ष प्राप्त किया कि कुल निवेश का कम से कम 1/3 भाग पूँजीगत क्षेत्र को आवटित किया जाना चाहिये। प्रो महालनोबिस के तर्क की प्रमुख मान्यता यह है कि अर्थव्यवस्था बन्द (A closed one) प्रकार की है। अन्तर्राष्ट्रीय व्यापार विद्यमान होने की स्थिति में प्रो महालनोबिस के तर्क को उचित प्रमाणित करने हेतु यह आवश्यक है कि निर्यात द्वारा अर्जित आय निश्चित तथा बेलोचदार हो। इस मान्यता के फलस्वरूप यह तर्क सगत है कि विकास हेतु पूँजीगत वस्तुओं का उत्पादन घरेलू क्षेत्र में ही किया जाना चाहिये। अतएव यह कथन उचित प्रतीत होता है कि द्वितीय तथा तृतीय पचवर्षीय योजना के नियोजन की व्यूह-रचना अधिकाश रूप में आयात स्थानापन्न की नीति पर आधारित थी। प्रो महालनोबिस ने मूलत विकास की व्यूह-रचना का दो क्षेत्रों में विश्लेषण किया। परन्तु विदेशी व्यापार समस्या के समावेश हेतु प्रो के एन राज एव ए के सेन ने महालनोबिस के तर्क का चार क्षेत्रीय निदर्श के रूप में विस्तार किया। उन्होंने यह प्रदर्शित किया कि केवल पूँजीगत वस्तुओं का उत्पादन ही महत्त्वपूर्ण नहीं है, अपितु उन पूँजीगत वस्तुओं का उत्पादन भी किया जाना चाहिये, जिसके द्वारा पूँजी में पुन वृद्धि हो। अस्तु यह नवीन राज-सेन निदर्श (Raj-Sen Model) मशीन निर्माण क्षेत्र (M-Sector) पर बल देता है। क्योंकि इस क्षेत्र द्वारा उपभोग्य वस्तुओं तथा मध्यवर्ती वस्तुओं की उत्पादन सेवाओं हेतु निवेश वस्तुओं (I-goods) का उत्पादन होता है तथा यन्त्रों (Machines) का भी उत्पादन किया जा सकता है। यह स्मरणीय है कि नवीन निदर्श महालनोबिस निदर्श की उपेक्षा नहीं करता, वरन् इससे निदर्श का विस्तार होता है। चूँकि यह तर्क द्वितीय तथा तृतीय पचवर्षीय योजना के अन्तर्गत

पूर्णतया मान लिया गया था। अस्तु, भारतीय आयोजन की व्यूह-रचना का महत्त्वपूर्ण पक्ष बड़े पैमाने के पूँजी गहन औद्योगीकरण पर विशेष बल देना है, जोकि उपभोग्य वस्तुओं के उद्योगों की कीमत पर किया जा सकता है।

वकील एवं ब्रह्मानन्द (Vakil and Brahmanand) ने 'परियोजना चयन प्रणाली' (Project Selection Approach) पर बल दिया, जिसके अनुसार उस परियोजना का चयन किया जाता है, जिसमें पूँजी-निर्गत अनुपात अल्प मात्रा में होता है परन्तु प्रो. महालनोबिस ने इस प्रणाली का समर्थन नहीं किया। इस सन्दर्भ में महालनोबिस निदर्श महत्त्वपूर्ण है, जिसके द्वारा यह व्यक्त होता है कि केवल पूँजी निर्गत अनुपात का ही महत्त्व नहीं है, अपितु अन्य तथ्य (आर्थिक विकास एवं योजना के उद्देश्य को प्राप्त करने हेतु आवश्यक वस्तुओं के प्रकार) भी उतने ही महत्त्वपूर्ण हैं। यद्यपि अर्थव्यवस्था में बड़े उद्योगों की आवश्यकता है, जिसमें पूँजी का उपयोग स्वच्छन्दतापूर्वक किया जाता है तथा स्पष्ट रूप से पूँजी निर्गत अनुपात उच्चतम है, परन्तु केवल इस तर्क के आधार पर राष्ट्र निर्माण में सहायक उद्योगों की संरचना की उपेक्षा नहीं की जा सकती है, जोकि प्रायः हम हम करते रहते हैं।

हैरॉड एवं महालनोबिस विकास निदर्श की समानताएँ (Similarities between Harrod and Mahalanobis Growth Models)

अक्टूबर 1957 में प्रो. महालनोबिस द्वारा विकसित एकल क्षेत्र निदर्श हैरॉड- डोमर निदर्श के विकास पथ के अनुरूप ही था। सन् 1953 में उन्होंने इस निदर्श को 'दो क्षेत्र निदर्श' में परिवर्तित करके भारतीय द्वितीय पचवर्षीय योजना में प्रयुक्त किया। हैरॉड-डोमर तथा महालनोबिस निदर्शों के विकास पथ निम्न प्रकार हैं

$$Y_t = Y_o \left[1 + \frac{\alpha_o}{\alpha} \{(1+\alpha\beta)^t - 1\}\right] \qquad (i)$$

$$Y_t = Y_o \left[1 + \alpha_o \left(\frac{\lambda_k\beta_k + \lambda_c\beta_c}{\lambda_k\beta_k}\right) (1+\beta_k\lambda_k)^t - 1\right] \qquad (ii)$$

दोनों विकास पथों की तुलना द्वारा निम्नांकित तथ्य स्पष्ट हैं

(a) हैरॉड-डोमर निदर्श में प्रयुक्त बचत की सीमान्त प्रवृत्ति के प्रतीक α का महालनोबिस निदर्श में $\frac{\beta_k \lambda_k}{\lambda_k \beta_k + \lambda_c \beta_c}$ द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

(b) हैरॉड-डोमर निदर्श में प्रयुक्त $\alpha\beta$ को महालनोबिस निदर्श में $\beta_k\lambda_k$ द्वारा प्रदर्शित किया गया है, अर्थात् हैरॉड-डोमर निदर्श में $(1+\alpha\beta)^t$ महालनोबिस निदर्श में $(1+\lambda_k \beta_k)^t$ के समकक्ष है।

पुनश्च, दोनों निदर्शों में परचता समयावधि का उपयोग होता है। इनकी प्रमुख समानताएँ निम्नलिखित है

(1) हैरॉड डोमर निदर्श पूँजी-सचय का सरलतम विकास निदर्श हैं, परन्तु महालनोबिस निदर्श हैरॉड-डोमर निदर्श का विस्तार है।

(2) दोनों निदर्शों का लक्ष्य किसी देश की राष्ट्रीय आय में वृद्धि करना है।

(3) दोनों निदर्श गुणक तथा त्वरक की अन्तर्क्रियाओं पर आधारित हैं।

(4) हैरॉड-डोमर निदर्श में पूँजी-निर्गत अनुपात को स्थिर माना जाता है। महालनोबिस निदर्श में भी पूँजी निर्गत अनुपात को अचर माना जाता है, क्योंकि प्रो महालनोबिस के अनुसार β_c तथा β_k तकनीकी रूप से स्थिर है।

महालनोबिस दो क्षेत्रीय निदर्श
(Mahalanobis Two-Sector Model)

प्रो महालनोबिस निदर्श इस दृष्टिकोण से कि ये निदर्श अन्तर्राष्ट्रीय व्यापार की मान्यता पर आधारित नहीं है, वद निदर्श है। इसके अन्तर्गत अर्थव्यवस्था को दो क्षेत्रों में विभाजित किया गया है। पूँजीगत वस्तु क्षेत्र एव उपभोग वस्तु क्षेत्र। इन क्षेत्रों को पारस्परिक अनुलम्ब रूप में सघटित (Vertically intergrated) माना जाता है। उपभोग क्षेत्र के लिये कच्चा माल तैयार करने वाले क्षेत्र उपभोग क्षेत्र में सम्मिलित किये जाते है तथा पूँजीगत क्षेत्र के लिये कच्चा काल तैयार करने वाले क्षेत्रों की गणना पूँजीगत क्षेत्र के अन्तर्गत की जाती है। प्रो महालनोबिस के अनुसार निवेश को समयानुसार दो भागों में विभाजित किया जा सकता है, एक भाग पूँजीगत जस्तु क्षेत्र में उत्पादन क्षमता में वृद्धि हेतु तथा द्वितीय भाग उपभोग वस्तु क्षेत्र की उत्पादन क्षमता में वृद्धि हेतु प्रयुक्त होताहै। तब निवेश I_t दो भागों में विभाजित हो जाता है

$$I_t = \lambda_k I_t + \lambda_c I_t \qquad (6\ 4)$$

यहाँ λ_k = पूँजीगत वस्तु क्षेत्र को जाने वाला अनुपात

तथा λ_c = उपभोग वस्तु क्षेत्र को जाने वाला अनुपात

फलस्वरूप $\lambda + \lambda_c = 1$

मान्यतानुसार β_k = पूँजीगत वस्तु क्षेत्र में पूँजी-निर्गत अनुपात

तथा β_c = उपभोग वस्तु क्षेत्र में पूँजी-निर्गत अनुपात

आय सर्वसमिका निम्न प्रकार है

$$Y_t = Ct + I_t \qquad (6\ 5)$$

$$\beta = \frac{\beta_k \lambda_k + \beta_c \lambda_c}{\lambda_k + \lambda c} = \text{कुल उत्पादकता गुणाक}$$

$$\lambda_k+\lambda_c = 1$$

$$\beta = \beta_k\lambda_k+\beta_c\lambda_c \quad (6\ 6)$$

यहाँ β_k = पूँजीगत वस्तु क्षेत्र में निवेश की सीमांत प्रवृति

β_c = उपभोग वस्तु क्षेत्र में, निवेश की सीमांत प्रवृत्ति

आय में परिवर्तन के परिणामस्वरूप निवेश तथा उपभोग में भी परिवर्तन होगा। निवेश (अथवा उपयोग) में परिवर्तन पूर्व वर्ष के निवेश $(I_{t\ 1})$ पर निर्भर है। इस स्थिति में विकास पथ के समीकरण निम्नाकित हैं

$$I_t-I_{t\ 1} = \beta_k\lambda_k I_{t\ 1} \quad (6\ 7)$$

तथा

$$C_t-C_{t\ 1} = \beta_c\lambda_c I_{t\ 1} \quad (6\ 8$$

समीकरण (6 7) को निम्न प्रकार हल किया जा सकता है

$I_t = (1+\beta_k\lambda_k)It\ 1$

t के विभिन्न मान ($t = 1,2,$, आदि) रखने पर सम्बन्धित व्यंजक प्राप्त होते हैं,

$$I_t = (1+\beta k\lambda_k)I_{t\ 1}$$

$$I_2 = (1+\beta k\lambda_x)I_1$$

$$= (1+\beta k\lambda_k)\ (1+\beta k\lambda_k)I_o$$

$$= (1+\beta k\lambda_k)^2\ I_o$$

आदि आदि अन्तिम रूप में

$$I_t = (1+\beta_k\lambda_k)^t\ I_o \quad (6\ 9)$$

अथवा

$$I_t-I_o = I_o\ [1+\beta_k\lambda_k)^t-1] \quad (6\ 10)$$

यहाँ I_o = प्रारम्भिक निवेश

समीकरण (6 10) निवेश विकास पथ है।

इसी प्रकार समीकरण (6 8) को $t = 1,\ 2,$ आदि रख कर निम्न प्रकार हल किया जा सकता है

$$C_1-C_o = \beta_c\lambda_c I_o$$

$$C_2-C_1 = \beta_c\lambda_c I_1$$

$$C_t-C_{t\ 1} = \lambda_c\beta_c I_{t\ 1}$$

द्वारा हमें प्राप्त होता है,

$C_t-C_o = \beta c\lambda_c[I_o+I_1+I_2+ \quad +I_{t\ 1}]$

समीकरण (6 10) से $I_1,\ I_2,\ \ +I_{t\ 1}$ के मान रखने पर प्राप्त होता है,

$$C_t - C_o = \lambda_c \beta_c [I_o + \lambda_k \beta_k) I_o + (1+\lambda_k \lambda_k)^2 I_o + + (1+\lambda_k \beta_k)^{t-1} I_o]$$

$$= \lambda_c \beta_c I_o [1 + (\lambda_k \beta_k) + (1+\lambda_k \beta_k)^2 + + (1+\lambda_k \beta_k)^{t-1}]$$

$$= \lambda_c \beta_c I_o \frac{(1+\lambda_k \beta_k)^t - 1}{(1+\lambda_k \beta_k) - 1}$$

(गुणोत्तर श्रेणी $a, ar, \quad ar^{n-1}$ के n पदो का योग $= \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ यदि $r > 1$)

अथवा $C_t - C_o = \lambda_c \beta_c I_o \frac{(1+\lambda_k \beta_k)^{t-1}}{(1+\lambda_k \beta_k)}$ (6 11)

समीकरण (6 11) उपभोग विकास पथ है।

आय में वृद्धि, निवेश में परिवर्तन तथा उपभाग में परिवर्तन क योग क बराबर हागी। अर्थात्

$$\Delta Y_t = \Delta C_t + \Delta I_t$$

अथवा $Y_t - Y_o = (C_t - C_o) + (I_t - I_o)$

समीकरण (6 10) तथा (6 11) मे मान रखने पर प्राप्त होता है,

$$Y_t - Y_o = \lambda_c \beta_c I_o \frac{1+\lambda_k \beta_k)^t - 1}{\lambda_k \beta_k} + I_o[(1+\lambda_k \beta_k)^t - 1]$$

$$= I_o[(1+\lambda_k \beta_k)^t - 1] \frac{\lambda_c \beta_c}{\lambda_k \beta_k} + 1$$

$$= I_o[(1-\lambda_k \beta_k)^t - 1] \frac{\lambda_k \beta_k + \lambda_c \beta_c}{\lambda_k \beta_k}$$

अथवा $\alpha_o Y_o[(1+\lambda_k \beta_k)^t - 1] \frac{\lambda_k \beta_k + \lambda_c \beta_c}{\lambda_k \beta_k} + Y_o$

यहाँ $I_o = \alpha_o Y_o$, मान्यतानुसार

प्रो महालनोबिस ने उद्योग क्षेत्र का विभाजन इस कारण नहीं किया था कि इससे आय वृद्धि की प्रक्रिया का अध्ययन सुगमतापूर्वक किया जा सकता है, अपितु वास्तविकता यह है कि आय का समय पथ यथावत रहता है, केवल गुणाक β_c के, जोकि अब विभिन्न उपभोग क्षेत्रों के निर्गत पूँजी अनुपात $(\beta = Y/K)$ के भारित माध्य के रूप में लिया गया है। सम्बन्धों की इस नवीन प्रक्रिया में, एक नवीन चर रोजगार तथा प्राचलों के नवीन समुच्चय का समावेश किया गया है।

प्रो महालनोबिस ने अपने चार-क्षेत्रीय निदर्श का उपभोग नीति सम्बन्धी समस्याओं के हल हेतु किया है। उनके समक्ष दो लक्ष्य प्रस्तुत थे, प्रथम निश्चित समयावधि में आय वृद्धि की अभिग्रहीत दर एव द्वितीय इसी समयावधि में रोजगार के अवसरों में वृद्धि। अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के मध्य आवटित निवेश अनुपात इनके उपकरण है।

अर्थव्यवस्था के उपयुक्त चार क्षेत्रों हेतु अग्राकित प्राचल परिभाषित किये गये हैं

(i) β's अर्थात् β_k, β_1, β_2, β_3, क्रमश प्रत्येक क्षेत्र के लिये निर्गत पूँजी अनुपात (Y/K) अथवा निवेश वृद्धि तथा आय वृद्धि अनुपात को प्रकट करते है।

(ii) θ's अर्थात् θ_k, θ_1, θ_2, θ_3 क्रमश प्रत्येक क्षेत्र के लिये पूँजी श्रम अनुपात (K/L) अथवा प्रति श्रम निवेश (पूँजी) अनुपात को व्यक्त करते हैं

(iii) λ's अर्थात् λ_k, λ_1, λ_2, λ_3, क्रमश प्रत्येक क्षेत्र के प्रदत्त निवेश अनुपात है।

हम मान लें कि,
A = पचवर्षीय योजना काल में कुल निवेश,
E = राष्ट्रीय आय में वृद्धि ΔY),
N = पचवर्षीय योजनाकाल में रोजगार में वृद्धि।

राष्ट्रीय आय के क्षेत्रीय मानों को पृथक लक्ष्य नहीं माना जाता है। राष्ट्र के प्रत्येक क्षेत्र में हुई वृद्धि को राष्ट्रीय आय में हुई वृद्धि के रूप में निर्दिष्ट किया जाता है। उपकरण मानों (λ's) का समुच्चय ज्ञात होने के पश्चात् विभिन्न क्षेत्रों की राष्ट्रीय आय वृद्धि को स्वत ही ज्ञात किया जा सकता है। प्रो महालनोबिस ने भी आय वृद्धि के समय तथा उपकरणों के पश्चता की उपेक्षा की है। प्रश्न यह उत्पन्न होता है कि, क्या इन सभी निर्दिष्ट गुणाकों द्वारा आर्थिक नीति का निर्धारक निदर्श प्राप्त किया जा सकता है।

यदि β, θ तथा λ आदि के मान ज्ञात हों तब महालनोबिस चार क्षेत्रीय निदर्श के महत्त्वपूर्ण समीकरण निम्न प्रकार हैं

$$E = E_k + E_1 + E_2 + E_3 \qquad (6\ 13)$$

$$N = N_k+N_l+N_2+N_3 \quad (6\ 14)$$
$$A = \lambda_k A+\lambda_l A+\lambda_2 A+\lambda_2 A+\lambda_3 A \quad (6\ 15)$$

निम्नांकित समीकरणों द्वारा प्रत्येक क्षेत्र की रोजगार वृद्धि का आगणन किया जा सकता है

$$N_k = \frac{\lambda_k A}{\theta_k} \quad (6\ 16)$$

$$N_l = \frac{\lambda_l A}{\theta_l} \quad (6\ 17)$$

$$N_2 = \frac{\lambda_2 A}{\theta_2} \quad (6\ 18)$$

$$N_3 = \frac{\lambda_3 A}{\theta_3} \quad (6\ 19)$$

उपरोक्त समीकरणों द्वारा A का मान प्राप्त किया जाता है,

$$A = N_k\ \theta_l+N_l\ \theta_l+N_2\ \theta_3 \quad (6\ 20)$$

समीकरण (6 20) यह व्यक्त करता है कि योजनाकाल में कुल निवेश प्रत्येक क्षेत्र के रोजगार वृद्धि तथा पूँजी-श्रम अनुपात के गुणजो (Multiples) के योग के बराबर होगा।

इसी प्रकार प्रत्येक क्षेत्र की आय में वृद्धि का आगणन निम्नलिखित समीकरणों द्वारा किया जा सकता है

$$E_k = (\lambda_k\ A)\beta_k \quad (6\ 21)$$
$$E_l = (\lambda_l\ A)\beta_l \quad (6\ 22)$$
$$E_2 = (\lambda_2\ A)\beta_2 \quad (6\ 23)$$
$$E_3 = (\lambda_3\ A)\beta_3 \quad (6\ 24)$$

उपरोक्त समीकरण समुच्चय द्वारा आय में कुल वृद्धि का प्राक्कलन निम्न प्रकार किया जाता है

$$E = \beta_k A+\lambda_k A + \beta_l\lambda_l A + \beta_2\lambda_2\ A + \beta_3\lambda_3 A \quad (6\ 25)$$

समीकरण (6 16) से (6 19) की सहायता द्वारा रोजगार वृद्धि के पदों में राष्ट्रीय आय वृद्धि को ज्ञात कर सकते हैं

$$E = N_k\theta_k\beta_k + N_1\,\theta_1\,\beta_1 + N_2\,\theta_2\beta_2 + N_3\theta_3\beta_3 \qquad (6\ 26)$$

यदि आय वृद्धि की वार्षिक दर ज्ञात हो तब पाँच वर्ष पश्चात् राष्ट्रीय आय में वृद्धि के निम्नांकित सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं

$$E = \Delta\ Y = Y_o\,[(1+g)^5-1] \qquad (6\ 27)$$

यहाँ $\Delta\ Y$ = राष्ट्रीय आय में कुल वृद्धि

Y_o = प्रारम्भिक आय

g = आय वृद्धि की वार्षिक दर

अब, यदि $Y_o = 10,8000$ करोड रुपये

$g = 5$ प्रतिशत

तब योजना के पाँच वर्ष पश्चात् राष्ट्रीय आय में कुल वृद्धि

$$E = 10,8000\,[(1+\frac{5}{100})^5-1]$$

$$= 2984 \text{ करोड रुपये}$$

चूँकि इस निदर्श के अन्तर्गत 11 समीकरण तथा 12 अज्ञात चर है, अत प्रत्येक क्षेत्र हेतु निवेश, रोजगार तथा आय को ज्ञात करना सम्भव नहीं होता है। इस स्थिति में निदर्श अनिर्धारक (Indeterminate) हो जाता है।

यदि, किसी प्रकार , समीकरणों तथा चरों की सख्या बराबर की जावे, तब यह निदर्श निर्धारक हो जाता है। अस्तु, निदर्श की निर्धारक रचना करने हेतु प्रो महालनोबिस ने एक चर λ_k को वाह्यरूप से ज्ञात माना है

यहा $\lambda_k = \frac{1}{3} = 33$ प्रतिशत

राष्ट्रीय आय में वृद्धि *(E)*, रोजगार में वृद्धि *(N)* तथा निवेश में वृद्धि *(A)* स्वेच्छ स्थिरांक तथा योजना के लक्ष्य हैं, जो कि योजनाकाल में उपलब्ध किये जाते हैं। द्वितीय पचवर्षीय योजना की समयावधि हेतु प्रो महालनोबिस ने तीन स्थिराक निम्न प्रकार व्यक्त किए थे

$A = 5,600$ करोड रुपये

$E = 5$ प्रतिशत अर्थात् लगभग 3000 करोड रुपये प्रति वर्ष

$N = 110$ लाख

पुन $\beta's$ तथा $\theta's$ निदर्श में ज्ञात चरों के सरचनात्मक प्राचल है। ये सरचनात्मक प्राचल प्रौद्योगिकी रूप से निर्धारित किये जाते है। योजना काल में इनको अपरिवर्तित माना जाता है। प्रो महालनोबिस ने अपने निदर्श में चार विभिन्न क्षेत्रों हेतु इन प्राचलों को निम्नलिखित मान प्रदान किए

पूँजी-श्रम अनुपात (θ's)

θ_k = प्रति श्रम 20 000 रुपये
θ_1 = प्रति श्रम 8,750 रुपये
θ_2 = प्रति श्रम 2,500 रुपये
θ_3 = प्रति श्रम 3,750 रुपये

निर्गत-पूँजी अनुपात (β s)

β_k = 0 20 प्रति एक रुपया पूँजी
β = 0 35 प्रति एक रुपया पूँजी
β_2 = 1 25 प्रति एक रुपया पूँजी
β_3 = 0 45 प्रति एक रुपया पूँजी

उपरोक्त सूचना (आँकड़ों) के आधार पर निवेश, आय तथा रोजगार में वृद्धि निम्न प्रकार परिकलित की जा सकती है

क्षेत्र K

$$A_k = \lambda_k A = \frac{33}{100} \times 56000 = 1,850 \text{ करोड़ रुपये}$$

$$E_k = (\lambda_k A)\beta_k = 1850 \times \frac{20}{100} = 370 \text{ करोड़ रुपये}$$

$$N_k = \frac{\lambda_k A}{\theta_k} = \frac{1850}{20,000} = 9 \text{ लाख रुपये}$$

इसी प्रकार अन्य क्षेत्रों के लिये निवेश, आय तथा रोजगार में वृद्धि परिकल्पित की जा सकती है। विभिन्न क्षेत्रों के परिणाम सारणी (6 1) में व्यक्त किये गये हैं

सारणी 6 1

क्षेत्र	निवेश में वृद्धि (A) करोड़ रुपयों में	राष्ट्रीय आय में वृद्धि (E) करोड़ रुपयों में	रोजगार में वृद्धि (N) लाख रुपयों में
K—क्षेत्र	1,850	370	9
C_1—क्षेत्र	980	340	11
C_2—क्षेत्र	1,180	1,470	47
C_3—क्षेत्र	1,600	720	43
कुल	5,610	2,900	110

भारत सरकार ने इस निदर्श का उपयोग द्वितीय पचवर्षीय योजना तथा अन्य परवर्ती (Subsequent) योजनाओं में किया। यद्यपि यह निदर्श योजनाओं में अत्यन्त उपयोगी सिद्ध हुआ है, तथापि अनेक आधारों पर इसकी आलोचना की गई है। आलोचकों में आलोक घोष (Alok Ghosh), प्रो ए मित्रा (A Mitra), प्रो के एन राज (K.N Raj) आदि अर्थशास्त्री प्रमुख है।

महालनोबिस निदर्शों की आलोचनाएँ
(Criticisms of Mahalaobis Models)

महालनोबिस निदर्श की मुख्य आलोचनाएँ निम्न प्रकार है

(i) यह निदर्श केवल परिचालन (Operational) निदर्श है। यह कल्याण फलन के आधार को स्पष्ट नहीं करता, जिनकी अनुपस्थिति में साधनों का उचित आवटन असम्भव है।

(ii) इस निदर्श में उपभोग वस्तुओं की उपेक्षा की गई है।

(iii) इस निदर्श में यह मान लिया गया है कि कुल निवेश का एक तिहाई पूँजीगत वस्तु क्षेत्र को आवटित किया जाता है। परन्तु यह अनुपात किस प्रकार और क्यों लिया गया है, इसके लिये उन्होंने कोई स्पष्टीकरण प्रस्तुत नहीं किया है।

(iv) *पूँजी-निर्गत अनुपात (K/O) की पूर्णतया उपेक्षा की गई है। चूँकि हमारे देश* में पूँजी का अभाव तथा श्रम की बहुलता है, अस्तु हमें अपने साधनों का उपयोग अनुकूलतम विधि द्वारा करना चाहिये।

(v) इस निदर्श में कृषिगत उत्पादों को पूर्णतया लोचदार माना गया है। पचवर्षीय योजना काल में यह स्थिति नहीं थी, क्योंकि कृषिगत वस्तुओं की माँग पूर्ति से अधिक थी।

(vi) यह निदर्श श्रम की पूर्ति को भी पूर्णतया लोचदार मानता है, जोकि उचित नहीं है, *क्योंकि उत्पादन हेतु कुशल श्रमिकों की आवश्यकता होती है* जोकि पूर्णतया लोचदार नहीं होती है। प्रो महालनोबिस ने सभी श्रमिकों (कुशल तथा अकुशल) को समान स्तर पर माना है, जिसको उचित नहीं कहा जा सकता है।

(vii) इस निदर्श में पूँजी निर्गत अनुपात को योजनाकाल में स्थिराक माना गया है, *जबकि वास्तव में यह समय के साथ- साथ परिवर्तित होता है।*

7

सरल रेखीय समाश्रयण तथा सहसम्बन्ध
(Simple Regression and Correlation)

दो या अधिक चरों में प्राय अत्यधिक सम्बन्ध पाया जाता है। अर्थात् एक चर के मान में होने वाले परिवर्तन के कारण अन्य चरो मे भी परिवर्तन की प्रवृत्ति पाई जाती है। उदाहरणार्थ– किसी देश का वार्षिक निर्यात उस वर्ष की राष्ट्रीय आय से सम्बन्धित हो सकता है एव किसी देश का आयात कुल आय तथा निवेश पर निर्भर हो सकता है। यह कारण व परिणाम का सम्बन्ध भी हो सकता है। अत हम सहसम्बन्ध की निम्नांकित परिभाषा प्रस्तुत कर सकते है

जब दो या अधिक चरों में एक साथ एक ही दशा में अथवा विपरीत दिशाओं में परिवर्तन हो तथा एक चर में परिवर्तन दूसरे चर में परिवर्तन का कारण हो (अथवा इस प्रकार माना जा सके) तब वे चर सम्बन्धित चर (Related variables) कहलाते हैं तथा यह कहा जाता है कि उन चरों में सहसम्बन्ध है।

सम्बद्ध चरों के मध्य परिवर्तनों की दिशा एव अनुपात आदि के आधार पर सहसम्बन्ध निम्न प्रकार का हो सकता है

(1) धनात्मक अथवा ऋणात्मक (Positive or Negative) — समस्त चरों में परिवर्तन एक ही दिशा में होने (अर्थात् एक चर-मूल्य में वृद्धि अथवा कमी होने पर अन्य चर-मूल्य में भी वृद्धि अथवा कमी की स्थिति में सहसम्बन्ध धनात्मक होता है। उदाहरणार्थ, किसी वस्तु के मूल्य में वृद्धि की दशा में उसकी पूर्ति में भी वृद्धि हो जाती है तथा वस्तु के मूल्य में कमी की अवस्था में उसकी पूर्ति में भी कमी हो जाती है।

चरों मे होने वाले परिवर्तन परस्पर विपरीत दिशा में हों तब उनके सम्बन्ध को ऋणात्मक अथवा विलोम सहसम्बन्ध कहा जाता है। उदाहरणार्थ, मूल्य में वृद्धि होने पर माँग में कमी होती है तथा मूल्य में कमी होने पर माँग में वृद्धि होती है।

7

सरल रेखीय समाश्रयण तथा सहसम्बन्ध
(Simple Regression and Correlation)

दो या अधिक चरों में प्रायः अन्योन्याश्रित सम्बन्ध पाया जाता है। अर्थात् एक चर के मान में होने वाले परिवर्तन के कारण अन्य चरों में भी परिवर्तन की प्रवृत्ति पाई जाती है। उदाहरणार्थ, किसी देश का वार्षिक निर्यात उस वर्ष की राष्ट्रीय आय से सम्बन्धित हो सकता है एवं किसी देश का आयात कुल आय तथा निर्यात पर निर्भर हो सकता है। यह कारण व परिणाम का सम्बन्ध भी हो सकता है। अतः हम सहसम्बन्ध की निम्नांकित परिभाषा प्रस्तुत कर सकते हैं

जब दो या अधिक चरों में एक साथ एक ही दिशा में अथवा विपरीत दिशाओं में परिवर्तन हो तथा एक चर में परिवर्तन दूसरे चर में परिवर्तन का कारण हो (अथवा इस प्रकार माना जा सके) तब वे चर सम्बन्धित चर (Related variables) कहलाते हैं तथा यह कहा जाता है कि उन चरों में सहसम्बन्ध है।

सम्बद्ध चरों के मध्य परिवर्तन की दिशा एवं अनुपात आदि के आधार पर सहसम्बन्ध निम्न प्रकार का हो सकता है

(1) धनात्मक अथवा ऋणात्मक (Positive or Negative) — जब दोनों चरों में परिवर्तन एक ही दिशा में हो (अर्थात् एक चर मूल्य में वृद्धि अथवा कमी होने पर अन्य चर मूल्य में भी वृद्धि अथवा कमी की स्थिति में सहसम्बन्ध धनात्मक होता है। उदाहरणार्थ, किसी वस्तु के मूल्य में वृद्धि की दशा में उसकी पूर्ति में भी वृद्धि हो जाती है तथा वस्तु के मूल्य में कमी की अवस्था में उसकी पूर्ति में भी कमी हो जाती है।

चरों में होने वाले परिवर्तन परस्पर विपरीत दिशा में हों तब उनके सम्बन्ध को ऋणात्मक अथवा विलोम सहसम्बन्ध कहा जाता है। उदाहरणार्थ, मूल्य में वृद्धि होने पर माँग में कमी होती है तथा मूल्य में कमी होने पर माँग में वृद्धि होती है।

(2) सरल, आंशिक अथवा बहु सहसम्बन्ध (Simple, Partial and Multiple Correlation)— दो चर-मूल्यों के सहसम्बन्ध को सरल सहसम्बन्ध तथा दो से अधिक चरों के सहसम्बन्ध को बहु-सहसम्बन्ध कहा जाता है। आंशिक सहसम्बन्ध दो चरों का सरल सहसम्बन्ध है, जबकि उन दोनों चरों से अन्य चरों का प्रभाव निरस्त कर दिया गया हो।

रेखीय तथा अ-रेखीय सहसम्बन्ध (Linear and Non-Linear Correlation) — यदि दो चरों के मध्य परिवर्तन का अनुपात समान होता है तब उनमें रेखीय सहसम्बन्ध होगा। यदि चरों के मध्य परिवर्तनों का अनुपात समान नहीं है तब इसे अ-रेखीय अथवा वक्र रेखीय सहसम्बन्ध (Curvilinear Correlation) कहते है।

इस अध्याय में हम केवल सरलरेखीय समाश्रयण तथा सहसम्बन्ध का अध्ययन करेंगे

मानलो दो चर X तथा Y है जिनमें प्रत्येक के n मान क्रमश $x_1, x_2, \ldots, x_n$ और $y_1, y_2, \ldots, y_n$ है, इन मानों को n क्रमित युग्मों $(x_i, y_i, i = 1, 2, \ldots, n$ के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। ये युग्म द्विविचर आँकडे (Bivariate Data) कहलाते हैं तथा जिस समग्र से ये लिये गये हैं, उसे द्विविचर समष्टि (Bivariate Population) कहते हैं और इनके बारम्बारता बटन को द्विविचर बारम्बारता बटन (Bivariate Frequency Distribution) कहा जाता है, जिसको सहसम्बन्ध सारणी (Correlation Table) के रूप में प्रस्तुत किया जाता है।

यदि प्रत्येक युग्म को ग्राफ पेपर पर X-Y तल में एक बिन्दु द्वारा अंकित किया जाये तो बिन्दुओं के इस चित्र को बिन्दु-चित्र (Dot Diagram) अथवा प्रकीर्ण आरेख ((Scatter Diagram) कहा जाता है। बिन्दु-रेखीय रूप में सहसम्बन्ध तकनीक का अन्वेषण सर्वप्रथम सर फ्रांसिस गाल्टन (Sir Francis Galton) ने किया था। अर्थशास्त्र में सहसम्बन्ध तकनीक का विशेष महत्त्वव है। नीसवेंजर (Neiswenger) के मतानुसार, "सहसम्बन्ध विश्लेषण का आर्थिक व्यवहार के अध्ययन में योगदान है, विशेष महत्वपूर्ण चरों जिन पर अन्य चर निर्भर करते है, को खोजने में सहायक है, यह अर्थशास्त्री के समक्ष उन सम्बन्धों को स्पष्ट करता है जिनके द्वारा अर्थव्यवस्था उत्पन्न होती है तथा उसे उन उपायों का सुझाव देता है जिनके द्वारा स्थिरता उत्पन्न करने वाली शक्तियाँ प्रभावी हो सकती है।"

चरों के मध्य सम्बन्ध के रूप (Form) तथा सम्बन्ध के परिमाण (Strength or degree of relationship) का अध्ययन समाश्रयण तथा सहसम्बन्ध विश्लेषण कहा जाता है।

प्रकीर्ण चित्र में बिन्दुओं की स्थिति के अवलोकन द्वारा इन चरों के मध्य सम्बन्ध के रूप को अनुमानित किया जा सकता है, गणितीय भाषा में ये बिन्दु किसी वक्र के चहुँ ओर (More or less concentrated round a curve) एकत्र होकर एक निश्चित

रूप की ओर प्रवृत्त होते हुए दृष्टिगोचर होते है अर्थात् बिन्दुओं का वितरण किसी वक्र के समीप मे घना होता है। इस प्रकार के वक्र को समाश्रयण वक्र (Regression Curve) कहते है। इस वक्र का गणितीय समीकरण समाश्रयण समीकरण (Regression Equation) कहलाता है। यदि ये बिन्दु एक सरल रेखा के चहुँ ओर केन्द्रित होते है तब समाश्रयण वक्र रेखीय कहा जाता है तथा इसका समीकरण जो कि एक सरल रेखा का समीकरण है, रैखिक समाश्रयण अथवा समाश्रयण रेखा (Regression Line) कहलाता है। वक्र का समीकरण इस बात का द्योतक है कि चरों का सम्बन्ध स्थूल रूप से एक फलनीय सम्बन्ध के सन्निकट है।

समाश्रयण शब्द का अर्थ पीछे हटना अथवा प्रतीपगमन (Stepping back) है जिसका उपयोग उन्नीसवीं शताब्दी के अन्त में सर्वप्रथम गाल्टन (Galton) ने पिताओं तथा पुत्रों की ऊँचाइयों में सम्बन्ध स्थापित करने के लिए किया था। परन्तु आधुनिक काल में समाश्रयण शब्द का अर्थ चरों के मध्य किसी प्रकार का सम्बन्ध स्थापित करना समझा जाता है। सांख्यिकी में समाश्रयण विश्लेषण का प्रयोग उन समस्त क्षेत्रों में किया जाता है जिनमें दो अथवा अधिक सम्बन्धित चरों के विभिन्न मूल्यों में सामान्य माध्य की ओर वापस आने की प्रवृत्ति पायी जाती है। यहाँ एक चर को स्वतन्त्र (Independent) माना जाता है तथा दूसरे चर को आश्रित (Dependent) माना जाता है। समाश्रयण विश्लेषण की मुख्य समस्या यह है कि स्वतन्त्र चर के मान ज्ञात होने पर अन्य आश्रित चरों के मानों को किस प्रकार पूर्वानुमानित किया जाए। इसके लिए आवश्यक है कि चरों के सम्बन्ध विश्लेषणीय अथवा गणितीय रूप में प्रस्तुत किए जाए। इस प्रकार हम देखते है कि समाश्रयण विश्लेषण सम्बन्ध की प्रवृत्ति तथा मात्रा की माप करके हमें पूर्वानुमान की क्षमता प्रदान करता है। जबकि सहसम्बन्ध विश्लेषण दो अथवा अधिक चरों के सह परिवर्तनों की घनिष्ठता (Closeness) का परीक्षण करता है।

समाश्रयण का समीकरण रेखीय तब ही होगा, जबकि एक चर-मूल्य (स्वतन्त्र) में एक इकाई परिवर्तन होने पर दूसरे चर मूल्य (आश्रित) में एक निश्चित परिमाण में परिवर्तन हो। इस स्थिति मे समाश्रयण को 'सरल रेखीय समाश्रयण' तथा सहसम्बन्ध को 'सरलरेखीय सहसम्बन्ध कहा जाता है। जब हमारे समक्ष दो चर X तथा Y प्रस्तुत हों तब उनमें से किसी एक को स्वतन्त्र चर तथा दूसरे को आश्रित चर माना जा सकता है। यदि हम Y के मान को पूर्वानुमानित करना चाहते है, तब X को स्वतन्त्र चर मान कर उसको गणितीय रूप, अर्थात् X के फलन के रूप, में प्रस्तुत करते है। इस फलन को 'X पर Y' (Y on X) का समाश्रयण कहते है। इसी प्रकार यदि Y के दिये हुये मानों के लिए X के मान को पूर्वानुमानित करना हो तो X को Y के फलन के रूप में प्रस्तुत करते है, जिसे 'Y पर X' (X on Y) का समाश्रयण कहा जाता है। जैसे,

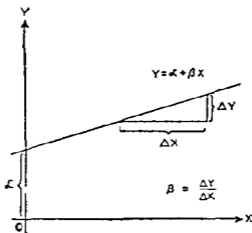
$Y = \alpha + \beta X$, (X पर Y की) या (Y की X पर) समाश्रयण रेखा है, तथा
$X = \gamma + \delta Y$, Y पर X की समाश्रयण रेखा है

अर्थात् दो चरों के मध्य सामान्य रूप से दो समाश्रयण रेखाएँ होती है। ये दोनों रेखाएँ एक समान हो जायेंगी, यदि X तथा Y में 'पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध' अथवा 'पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध' हो

सरल रेखीय समाश्रयण (Simple Linear Regression)

मान लो दो चरा X तथा Y के मान X_1 X_2, X_n तथा Y_1, Y_2, Y_n है तथा ये चर निम्नाकित सरल रेखा समीकरण द्वारा सम्बन्धित है,

$$Y = \alpha + \beta X \tag{1}$$

यहाँ α तथा β प्राचल है, जोकि क्रमश इस रेखा का कटान विन्दु तथा ढाल प्रदर्शित करत है। इसके लिये रेखाचित्र 7 1 का अवलोकन कीजिए।

रेखाचित्र 7 1

आर्थिक समक प्राय सही सरल रेखीय सम्बन्ध प्रदर्शित नहीं करते। अर्थात् प्रकीर्ण चित्र के सभी विन्दु एक सरल रेखा पर नहीं होते। यदि हम $X=X_i$ के लिये Y का अनुमानित मान $\hat{Y}_i$ ज्ञात करते है तब वह Y के प्रेक्षित (Observed) मान Y_i मे भिन्न होता है। Y_i तथा $\hat{Y}_i$ के अन्तर को अवशिष्ट अथवा याछच्छिक पद (Residual or Random Term) कहा जाता है।

उदाहरणार्थ, यदि हम परिवारों के निश्चित समय में अनुप्रस्थ काट समकों के आधार पर उपभोक्ता व्यय (Y) तथा प्रयोज्य आय (X) का सम्बन्ध ज्ञात करना चाहते है, तब

हमारे प्रतिदर्श में n परिवारों का चयन किया जायगा। इन n परिवारों द्वारा Y तथा X के n मानों के युग्म प्राप्त होंगे। अब हम यह नहीं मान सकते कि प्रत्येक परिवार जो कि प्रतिदर्श के अन्तर्गत है, अपनी दी हुई आय X' के अनुसार y' ही व्यय करेंगे। इनमें से कोई परिवार अधिक व्यय करेगा, परन्तु हम यह मान सकते है कि व्यय का मान एक निश्चित राशि के सन्निकट ही विचरण करेगा, जोकि ज्ञात आय के अनुकूल हो। इसको गणितीय रूप में निम्न प्रकार लिखते हैं

$$Y_i = a + \beta X_i + U_i$$

अथवा $U_i = Y_i - (\alpha + \beta X_i) = Y_i - Y_i$

यहाँ U_i धनात्मक अथवा ऋणात्मक दोनों मान ले सकता है

अथवा U_i = Y का वास्तविक अथवा प्रेक्षित मान— Y का प्रत्याशित अथवा अनुमानित मान

इस समीकरण में U को रखने के निम्नांकित तीन सम्भव कारण प्रस्तुत किये जा सकते है

(i) माल लो व्यय एक मात्र आय पर ही निर्भर नहीं होता, अपितु अन्य अनेक उपादानों जैसे, ब्याज की दर, परिवार के सदस्यों की आयु, पूर्व आय, प्रत्याशित आय, अर्थव्यवस्था में विज्ञापन का स्तर आदि पर भी निर्भर होता है। पुन मान लो कि उपभोग की सीमात प्रवृत्ति स्थिर नहीं है, अपितु आय के साथ साथ परिवर्तनशील है। तब समीकरण (7 2) जोकि व्यय को एक मात्र आय का फलन मानता है, उन उपादानों का जो व्यय को प्रभावित करते है, एक उचित विशेष विवरण नहीं है।
अत यह मान लिया जाता है कि इन समस्त उपादानों का प्रभाव त्रुटि-पद (Error-term) U में समायोजित हो गया है।

(ii) त्रुटिपद रखने का द्वितीय कारण यह है कि समस्त सम्बद्ध उपादानों के प्रभाव से पृथक याछच्छिक कारणों का एक समूह है जो कि समस्त आर्थिक समकों अथवा मानवीय क्रियाओं को आवश्यक रूप से प्रभावित करता है।

(iii) त्रुटि पद की उपस्थिति का तृतीय कारण मापक त्रुटियाँ अथवा प्रेक्षण त्रुटियाँ है।

अत समीकरण $Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i$
पर कुछ प्रतिबन्ध लगाये जाते हैं जैसे,

(i) त्रुटि पदों का माध्य (Mean) अथवा गणितीय प्रत्याशा (Mathematical Expectation) शून्य है, अर्थात् $E(U_i) = 0$, प्रत्येक i के लिये

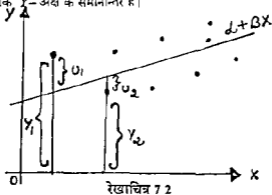
(ii) त्रुटि पद के विभिन्न मान परस्पर स्वतंत्र हैं। अर्थात् $E(U_i\ U_j) = 0\ i \neq j$ के लिये

(iii) त्रुटि पदों का प्रसरण (Variance) $E(U_i^2) = \sigma_u^2$ विद्यमान है।

गणितीय रूप में इस निदर्श को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i \qquad i = 1, 2, \ldots n$$
$$E(U_i) = 0 \qquad \text{प्रत्येक } i \text{ के लिये}$$
$$E(U_i\ U_j) = 0 \qquad i \neq j \text{ के लिये} \qquad (7.4)$$
$$E(U_i, U_j) = \sigma_u^2 \qquad i = j \text{ के लिये}$$

यहाँ α, β, तथा σ_u^2 अज्ञात प्राचल है। हम इन प्राचलों का सांख्यिकीय आधार पर आकलन करना चाहते है, जबकि हमें X तथा Y के लिये एक प्रतिदर्श ज्ञात है। त्रुटि-पद U_i की व्यावहारिक स्थिति चित्र द्वारा प्रकीर्ण आरेख (रेखाचित्र 8.2) में प्रदर्शित की गई है। प्रत्येक बिन्दु के लिए U_i का मान उस बिन्दु तथा समाश्रयण रेखा (Y on X) के मध्य का अन्तर है जोकि Y– अक्ष के समानान्तर है।

रेखाचित्र 7.2

ज्ञातव्य प्रतिदर्श (X_i, Y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ के सापेक्ष a तथा β के मानों का आकलन समाश्रयण रेखा का निर्धारण (Determining) आसजन (Fitting) कहलाता है, जिसकी सबसे उपयुक्त विधि 'न्यूनतम वर्ग विधि' (Method of least squares) है।

न्यूनतम वर्ग आकलन *(Least Squares Estimators)*

समाश्रयण रेखा को आसजन करने की वह विधि जिसके अनुसार प्रत्याशित व प्रेक्षित बिन्दुओं के मध्य की दूरियों के वर्गों का योग न्यूनतम हो, न्यूनतम वर्ग विधि कहलाती है तथा वह रेखा जो इस विधि द्वारा ज्ञात होती है, न्यूनतम वर्ग समाश्रयण रेखा (Least squares regression line) कही जाती है।

$$\frac{\delta S}{\delta \beta} = -2\,\Sigma X_t\,(Y_t - \alpha - \beta X_t) = 0$$

समीकरणों को सरल रूप में लिखने पर

$$\sum_{t=1}^{n} Y_t = n\alpha + \beta \Sigma X_t \qquad (7\ 8)$$

$$\sum_{t=1}^{n} X_t Y_t = \alpha \sum_{t=1}^{n} X_t + \beta \Sigma X_t^2 \qquad (7\ 9)$$

समीकरणों (7 8) तथा (7 9) को प्रसामान्य समीकरण (normal equations) कहते है। इन समीकरणों को हल करके α तथा β के मान $\hat{\alpha}$ तथा β प्राप्त किये जा सकते हैं।

समीकरण (7 8) को $(X\Sigma_t)$ से तथा (7 9) को n से गुणा करने पर

$$(\Sigma X_t)(\Sigma Y_t) = n\alpha(\Sigma X_t) + \beta(\Sigma X_t)^2 \qquad (7\ 10)$$

$$n(\Sigma X_t Y_t) = n\alpha(\Sigma X_t) + n\beta(\Sigma X_t^2) \qquad (7\ 11)$$

(7 11) में से (7 10) को घटाने पर,

$$n\Sigma X_t Y_t - \Sigma X_t \Sigma Y_t = \beta[n\Sigma X_t^2 - (\Sigma X_t)]$$

अथवा $$\beta = \frac{n\Sigma X_t Y_t - \Sigma X_t \Sigma Y_t}{n\Sigma X_t^2 - (\Sigma X_t)^2} = \frac{\Sigma X_t Y_t - \frac{\Sigma X_t \Sigma Y_t}{n}}{\Sigma X_t^2 - \frac{(\Sigma X_t)^2}{n}} \qquad (7\ 12)$$

β का मान समीकरण (7 8) में रखने पर,

$$n\hat{\alpha} = \Sigma Y_t - \hat{B}\Sigma X_t$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\Sigma Y_t}{n} - \beta\frac{\Sigma X_t}{n}$$

अथवा $$\hat{\alpha} = \frac{\Sigma Y_t \Sigma X_t^2 - \Sigma X_t \Sigma X_t \Sigma Y_t}{n\Sigma X_t^2 - (\Sigma X_t)^2} \qquad (7\ 13)$$

α तथा β के आकलित मान $\bar{X}$ तथा $\bar{Y}$ के रूप में इस प्रकार लिखे जा सकते है

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \beta\bar{X}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma Y_i X_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\Sigma X_i^2 - n\bar{X}^2} \qquad (7\ 14)$$

इन मानों को समीकरण 7 6 में रखने पर,

$$\hat{Y} = \bar{Y} - \beta \bar{X} - \beta X$$

अथवा $\hat{Y} - \bar{Y} = \beta (X - \bar{X})$ (7 15)

जहाँ $\beta = \frac{\Sigma Y_i X_i - n\bar{X} \bar{Y}}{\Sigma X_i^2 - n \bar{X}^2}$

(7 16) ही अभीष्ट समाश्रयण रेखा है।

अब मान लो

$$x_i = X_i - \bar{X} \qquad \text{तथा } Y_i = Y_i - \bar{Y}$$

$$\Sigma(x_i = \Sigma(X_i - \bar{X}) = 0, \text{ तथा } \Sigma y_i = \Sigma (Y_i - \bar{Y}) = 0$$

अर्थात् $\bar{x} = \bar{y} = 0$

यदि हम X तथा Y के स्थान पर उनके समान्तर माध्यों के विचलनों के मध्य समाश्रयण रेखा को निर्धारित करना चाहते हैं, तब हम पाते हैं कि $\hat{\alpha} = 0$ तथा

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma y_i x_i}{\Sigma x_i^2}$$

तथा $\hat{y} = \hat{\beta} x$ (7 16)

इसी प्रकार यदि X को आश्रित तथा Y को स्वतत्र चर माना जाए तब X की Y पर समाश्रयण रेखा

$$X - \bar{X} = \beta\ (Y - \bar{Y})$$

होगी।

समीकरण के ढाल β को 'Y का X पर' समाश्रयण गुणाक (Regression Coefficient of Y on X) भी कहा जाता है तथा b_{yx} द्वारा निरूपित (दर्शाया) किया जाता है। अर्थात्

$$b_{yx} = \beta = \frac{\Sigma\ Y_i X_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\Sigma X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

$$= \frac{\frac{\Sigma Y_i X_i}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{\frac{\Sigma X_i^2}{n} - \bar{X}^2} = \frac{Cov\ (X, Y)}{Var\ (X)} \qquad (7\ 17)$$

यहाँ Var (x) = X का प्रसरण

तथा Cov (X, Y) = X तथा Y का सह-प्रसरण

इसी प्रकार X का Y पर समाश्रयण गुणाक

$$b_{xy} = \beta = \frac{\Sigma\ Y_i X_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\Sigma Y_i^2 - n\bar{Y}^2}$$

$$= \frac{\frac{\Sigma Y_i X_i}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{\frac{\Sigma Y_i^2}{n} - \bar{X}^2} = \frac{Cov\ (X, Y)}{Var\ (Y)} \qquad (7\ 18)$$

यहाँ Var (Y) = Y का प्रसरण

अत Y की X पर समाश्रयण रेखा

$$Y - \bar{Y} = b_{yx}\ (X - \bar{X})$$

अथवा $$Y = \bar{Y} + \frac{Cov(X,Y)}{Var\ (X)}\ (X - \bar{X}) \qquad (7\ 19)$$

समाश्रयण रेखा दो चरों X तथा Y के सम्बन्ध की दिशा व्यक्त करती है।

(i) यदि β धनात्मक होगा तब दोनों के परिवर्तन एक ही दिशा में है।

(ii) यदि β ऋणात्मक होगा तब दोनों के परिवर्तन विपरीत दिशा में है

(iii) β, X के सापेक्ष Y के परिवर्तन की दर व्यक्त करता है।

सहसम्बन्ध गुणाक
(Correlation Coefficient)

यह ज्ञात करने के लिये कि किस सीमा तक X तथा Y रैखिक रूप (Linearly) से सम्बन्धित है, कार्ल पियरसन (Carl Pearson) ने कुछ मान्यताओ के आधार पर, जो कि व्यावहारिक दृष्टिकोण मे सांख्यिकीय ऑकडा मे प्राय स्वमेव विद्यमान है दो चरो का सहसम्बन्ध गुणाक (r) परिकलित करने का निम्नांकित सूत्र प्रस्तुत किया, जिसको इसकी परिभाषा भी कहा जा सकता है

$$r = r_{xy} = r_{yx} = \frac{\text{Cov}(X\,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\,\text{Var}(Y)}} \qquad (7\ 20)$$

जिसकी गणना करने के उद्देश्य से भिन्न-भिन्न रूपों में लिखा जा सकता है

$$r = \frac{\frac{1}{n}\Sigma(X_i-\bar{X})\,(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\{\frac{1}{n}\Sigma\,(X_i-\bar{X})^2\,\frac{1}{n}\Sigma(Y_i-\bar{Y})^2\}}}$$

$$= \frac{\Sigma X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{[\Sigma\,(X_i-\bar{X})^2\Sigma(Y_i-\bar{Y})^2]}}$$

$$\frac{\Sigma\,(Y_iX_i-n\,\bar{X}\,\bar{Y}}{\sqrt{[(\Sigma\,X_i^2-n\,\bar{X}^2)\,(\Sigma Y_i^2-n\bar{Y}Y^2)]}}$$

$$= \frac{\Sigma Y_i\,X_i\frac{\Sigma X_i,\Sigma\,Y_i}{n}}{\sqrt{(\Sigma X_i^2-\frac{(\Sigma X_i)^2}{n})\,(\Sigma Y_i^2-\frac{(\Sigma Y_i)^2}{n})}}$$

$$= \frac{\Sigma v_iu_i-\frac{\Sigma\,u\Sigma v_i}{n}}{\sqrt{[\{\Sigma\,u_i^2-\frac{(\Sigma u_i)^2}{n}\}\{\Sigma\,v_i^2\}-(\frac{\Sigma v_i)^2}{n}\}]}}$$

यहाँ $u_i = \frac{X_i - a}{K}, v_i = \frac{Y_i - b}{K}$

r का मान -1 तथा +1 के मध्य मे होता है, अर्थात् $-1 \leq r \leq 1$

यदि $r = -1$, तब समाश्रयण रेखा का निर्धारण सही है तथा y और x म पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध है। रेखा का ढाल (β) ऋणात्मक है।

यदि $r = +1$ तब भी समाश्रयण रेखा का निर्धारण सही है तथा y और x में पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध है। रेखा का ढाल (β) धनात्मक है।

यदि $r = 0$, तब y तथा x में कोइ रेखीय सम्बन्ध नहीं है। (यद्यपि अन्य प्रकार का सम्बन्ध हो अथवा न हो)

अर्थात् यदि चर x तथा y स्वतत्र हों तब उनका सहसम्बन्ध गुणाक शून्य होगा। किन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है (अर्थात दो चरों का सहसम्बन्ध गुणाक यदि शून्य हो तब भी उनका स्वतत्र होना अनिवार्य नहीं है))।

कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणाक की मान्यता (Assumptions of Karl Pearson's Correlation Coefficient)

(1) दोनों चर जिनके मध्य सहसम्बन्ध ज्ञात करना है, अनेक स्वतत्र कारणों द्वारा प्रभावित होते है जोकि उन चरों में परिवर्तन उत्पन्न करते हैं।

(2) दोनों चरों के पद मूल्यों को प्रभावित करने वाली शक्तियाँ, एक दूसरे से 'कारण तथा परिणाम' के रूप में सम्बन्धित है।

(3) दोनों चरों के मध्य रेखीय सम्बन्ध है।

कुछ महत्त्ववपूर्ण तथ्य

(i) दोनों समाश्रयण रेखाएँ एक दूसरे को बिन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ पर काटती है

(ii) दोनों समाश्रयण गुणाकों का गुणोत्तर माध्य (GM) सहसम्बन्ध गुणाक के बराबर होता है।

$$b_{yx} = \frac{\text{Cov }(x,y)}{\text{Var }(x)},\ b_{xy} = \frac{\text{Cov }(x,y)}{\text{Var }(y)}$$

$$\sqrt{b_{yx} \times b_{xy}} = \frac{\text{Cov }(x,y)}{\sqrt{\text{Var}(x)\text{Var}(y)}} = r$$

b_{yx}, b_{xy} तथा r तीनों के अश में Cov (x,y) आता है जोकि सहसम्बन्ध की दिशा व्यक्त करता है। अत तीनों के चिन्ह (धनात्मक अथवा ऋणात्मक) समान रहेंगे। यह विशेषता दोनो समाश्रयण रेखाओं में प्रतीक हेतु प्रयुक्त होती है, जबकि वे साधारण समीकरण के रूप में दी गई हो। उदाहरणार्थ,

यदि समीकरण $4y-9x = 15$

तथा $-6y+25x = 7$

दिये हों तब Y पर X की समाश्रयण रेखा ज्ञात करने हेतु तथा X पर Y की समाश्रयण रेखा ज्ञात करने हेतु हम किसी एक रेखा को Y पर X की तथा दूसरी को X पर Y की समाश्रयण रेखा मान लेते है पुनः दोनो के समाश्रयण गुणांक ज्ञात करके उनका गुणा करते है यदि गुणनफल एक से कम है तो मानी हुई रेखा सत्य है और यदि गुणनफल एक से अधिक है तब इसके विपरीत है।

यहाँ, मान लो $4y-9x = 15$ — Y पर X का समीकरण है

अथवा $4y = 9x+15$

अथवा $y = \frac{9}{4}x+15$

$b_{yx} = \frac{9}{4}$

इसी प्रकार− $6y+25x = 7$ — X पर Y का समीकरण हुआ

अथवा $25x = 6y+7$

अथवा $x = \frac{6}{25}y+7$

$b_{xy} = \frac{6}{25}$

अत $b_{yx} \times b_{xy} = \frac{9}{4}\times\frac{6}{25} = \frac{54}{100} < 1$

अतएव हमारी मान्यता सत्य है।

(iii) यदि $r = +1$ तो Y की X पर समाश्रयण रेखा

$$Y-\bar{Y} = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}(X-\bar{X})$$

को $$\sigma_x(Y-\bar{Y}) = \sigma_y(X-\bar{X}) \qquad (A)$$

लिखा जा सकता है।

तथा X की Y पर समाश्रयण रेखा

$$X-\bar{X} = \frac{r\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\bar{Y})$$

को $\sigma_y (X-\bar{X}) = \sigma_x (Y-\bar{Y})$ (B)

लिखा जा सकता है।

(A) तथा (B) द्वारा स्पष्ट है कि यदि $r = +1$, तब दोनों समाश्रयण रेखाएँ एक (Coincide) हो जाती हैं।

(iv) यदि $r = -1$, तब भी दोनों रेखाएँ एक हो जाती है।

(v) यदि $r = 0$ तब $Y = \bar{Y}$ तथा $X = \bar{X}$

अर्थात् दोनों समाश्रयण रेखाएँ एक दूसरे पर लम्ब होती है 'Y की X पर' X- अक्ष के समानान्तर तथा 'X की Y पर' Y- अक्ष के समानान्तर होती है। अर्थात् दोनों रेखाओं के मध्य का कोण $90°$ हो जाता है।

(vi) सहसम्बन्ध गुणांक पर मूल बिन्दु तथा पैमाने के परिवर्तन का कोई प्रभाव नहीं होता है, जबकि समाश्रयण गुणांक पैमाने के परिवर्तन द्वारा प्रभावित होता है।

अर्थात् चरों के मूलबिन्दु और पैमाने के परिवर्तन से r का मान अपरिवर्तित रहता है

यदि $U = \frac{X-a}{h}$ तथा $V = \frac{Y-b}{k}$ तब $r_{uv} = r_{xy}$ $b_{vu} = \frac{k}{h} b_{yx}$

तथा $b_{uv} = \frac{h}{k} b_{xy}$

सहसम्बन्ध गुणांक तथा समाश्रयण रेखाओं के निष्कर्ष
(Conclusions Drawn from Correlation Coefficient and Regression Lines)

द्विविचर समग्र (X, Y) से लिया गया n युग्मों (x_i, y_i) $i = 1, 2, \ldots, n$ का एक प्रतिदर्श है, जिसको सांख्यिकी भाषा में यादृच्छिक प्रतिदर्श (Random Sample) कहा जाता है। यदि X तथा Y के इसी समग्र से अन्य प्रतिदर्श प्राप्त किये जाएँ और r तथा b_{yx} या b_{xy} ज्ञात किये जायें तब वे पहले प्रतिदर्श के मानों से भिन्न होंगे। अस्तु, यह अनुमानित करने के लिये कि समग्र के सहसम्बन्ध तथा समाश्रयण गुणांक क्या हो सकते है, किस सीमा तक उनका मान निर्धारित किया जा सकता है, आदि के लिये सांख्यिकीय विधियों- 'आकलन' (Estimation), 'परिकल्पना परीक्षण' (Testing Hypotheses) तथा 'विश्वास्यता अंतराल' (Confidence Interval) आदि का सहयोग लिया जाता है, जोकि प्रायिकता सिद्धांत (Probability Distribution) पर आधारित है। यहाँ हम इन विधियों का सूक्ष्मतम अध्ययन करने की अपेक्षा केवल सम्बद्ध तथ्यों तथा सूत्रों का संक्षिप्त अध्ययन करेंगे।

सम्भाव्य त्रुटि (Probable Error)

सहसम्बन्ध गुणाक की सम्भाव्य त्रुटि ज्ञात करने के लिये निम्नाक्ति सूत्र का प्रयोग किया जाता है

$$PE = \rho \text{ की सम्भाव्य त्रुटि} = 6745\frac{1-r^2}{\sqrt{n}} \qquad (7\ 21)$$

यहाँ r एक यादृच्छिक प्रतिदर्श से आकलित मान है। तथा ρ समग्र के सहसम्बन्ध गुणाक का प्रतीक है।

यदि इस सम्भाव्य त्रुटि को सहसम्बन्ध गुणाक में जोड दिया जाये तथा घटा दिया जाये तब जो दो मान प्राप्त होंगे, उनकी सीमाआ के अन्तर्गत मूल समग्र (Original population) द्वारा प्राप्त अन्य यादृच्छिक प्रतिदर्शों के सहसम्बन्ध गुणाक पाये जाने की सम्भावना अत्यधिक होती है। अर्थात्, सम्भाव्य त्रुटि निर्धारित गुणाक के ऊपर व नीचे सीमाओं को परिभाषित करती है, जिनके अन्तर्गत अन्य प्रतिदर्शों का उसी प्रकार निर्धारित सहसम्बन्ध गुणाक पाये जाने की समान प्रायिकता है। मान लो, $n = 49$ युग्मों का सहसम्बन्ध गुणाक $r = 0\ 25$ है तब,

$$PE = 6745\frac{1-25^2}{\sqrt{49}} = 09$$

अत सहसम्बन्ध गुणाक की सीमाएँ 25± 09 अर्थात् 0 34 तथा 0 16 होंगी। तात्पर्य यह है कि यदि उसी समग्र में से 49 युग्मों का और यादृच्छिक प्रतिदर्श लेकर सहसम्बन्ध गुणाक निकाला जाये तो उसके 0 16 तथा 0 34 के मध्य होने की अधिक सम्भावना है।

सम्भाव्य त्रुटि का द्वितीय उपयोग r की सार्थकता ज्ञात करने के लिये किया जाता है

यदि कार्ल पियरसन के सहसम्बन्ध गुणाक का परिकलित मान (Calculated Value) सम्भाव्य त्रुटि से कम है, तब दोनों श्रेणियों में सहसम्बन्ध की उपस्थिति सार्थक (Significant) नहीं है। अर्थात् यदि $r < P.E$ तब सहसम्बन्ध का कोई प्रमाण नहीं है। इसी प्रकार यदि $r > 6\ PE$ तब सहसम्बन्ध निश्चित माना जाता है।

प्रमाप-त्रुटि (Standard Error)

सहसम्बन्ध गुणाक की प्रमाप-त्रुटि का सूत्र निम्नाक्ति है

$$\text{प्रमाप-त्रुटि (S E)} = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} \qquad (7\ 22)$$

स्पष्ट है कि $PE = 6745\ SE$ अथवा $PE = \frac{2}{3}SE$ लगभग

$r \pm 1\ 96\ SE$ का तात्पर्य है कि ρ का मान $r - 1\ 96\ SE$ तथा $+ 1\ 96$ SE के मध्य होने की प्रायिकता 95% है तथा इसे 5% सार्थकता स्तर पर सहसम्बन्ध गुणाक की सार्थक्ता ज्ञात करने के लिये उपयोग किया जाता है।

सहसम्बन्ध सार्थकता का t परीक्षण (t-Test for Testing the Significance of Carrelation Coeficient)

इस परीक्षण की विधि अग्र पृष्ठ पर अंकित है

(i) Ho समग्र में सहसम्बन्ध गुणाक ρ का मान शून्य है।

(ii) सहसम्बन्ध का गुणाक r परिकलित किया जाता है।

(iii) सूत्र $t=\frac{r}{1-r^2}\sqrt{n-2}$ से t का मान परिकलित किया जाता है।

(iv) 5% तथा 1% सार्थकता स्तर पर सारणी में $n-2\ d\ f$ के लिये t का मान देखा जाता है।

(v) **निष्कर्ष–** यदि t का परिकलित मान सारणी में दिये मान से अधिक होता है, तब सहसम्बन्ध उस स्तर पर सार्थक कहा जाता है। यदि t का परिकलित मान सारणी में दिये मान से कम होता है, तब सहसम्बन्ध सार्थक नहीं माना जाता।

आकलन की प्रमाप-त्रुटि (Standard Error of Estimate)

X पर Y के समाश्रयण $Y = \alpha + \beta X$ मे चर Y_i के प्रेक्षित मान तथा आकलित मान $\hat{Y}_i$ के अन्तर ($Y_i - \hat{Y}$) Y को आकलन त्रुटि कहते है, जिसकी प्रवृति सदैव यादृच्छिक होती है। आकलित मूल्य तथा प्रेक्षित मूल्य के मध्य निकटता ज्ञात करने के लिये 'आकलन की प्रमाप त्रुटि' निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जाती है

X पर Y के समाश्रयण आकलन की प्रमाप त्रुटि

$$= S_{yx} = \sqrt{\left\{ \frac{\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n} \right\}} \qquad (7\ 23)$$

यहाँ Y_i = Y का प्रेक्षित मान
$\hat{Y}_i$ = Y का आकलित मान
n = पदों की सख्या

जो कि समाश्रयण 'X पर Y' के आसजन श्रेष्ठता का माप (A measure of goodness of fit of the regression line y on x') है।

यदि $\hat{Y}_i$ की गणना न की जाये तब r, σ_x तथा σ_y के रूप में आकलन की प्रमाप त्रुटि का सूत्र निम्नांकित है

$$S_{yx} = \sigma_y \sqrt{(1 - r^2)} \qquad (7\ 24)$$

इसी प्रकार 'Y पर X' समाश्रयण आकलन की प्रमाप त्रुटि

$$S_{xy} = \sqrt{\left\{ \frac{\Sigma (X_i - \hat{X}_i)^2}{n} \right\}} = \sigma_x \sqrt{(1 - r^2)} \qquad (7\ 25)$$

प्रसामान्य बटन (Normal Distribution) की मान्यताओं के अनुसार X पर Y की समाश्रयण रेखा $\pm S_{yx}$ के बराबर दोनों ओर के क्षेत्र में प्रेक्षित मानों के 68 27% विन्दु बिखरे होंगे। इसी प्रकार रेखा के दोनों ओर $\pm\ 2\ S_{yx}$ में 95 45% $\pm$ 1 96 S_{yx} में 95%, $\pm$ 3 S_{yx} में 99 73% तथा ± 2 58 में 99% विन्दु बिखरे होंगे।

अवधारणा गुणाक (Coefficient of Determination)

हम देखते है 'आकलन की प्रमाप त्रुटि ' Y की मापन इकाई पर निर्भर करती है, अर्थात् यदि Y सेंटीमीटर में दी हो तब प्रमाप त्रुटि भी सेमी में ही मापी जाती है। अतएव अवधारणा गुणाक का अनुप्रयोग तुलनात्मक दृष्टि से अधिक महत्त्ववपूर्ण है। इसका प्रयोग दो चरों में प्राप्त सहसम्बन्ध गुणाक का निर्वचन (Interpretation) करने हेतु किया जाता है। अवधारणा गुणाक का विचार कुल विचरण (Total Variation) के दो भागों में विभक्त होने के फलस्वरूप उत्पन्न होता है।

अर्थात् कुल विचरण = स्पष्टीकृत विचरण + अस्पष्टीकृत विचरण

(Total Variation = Explained Variation + Unexplained Variation)

अब $\quad \text{Var}(Y) = \sigma_y^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y})^2}{n}$, कुल विचरण

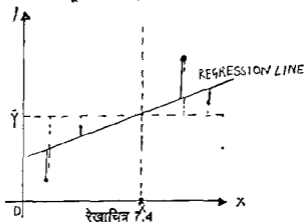
तथा $\quad S^2_{yx} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n}$, अस्पष्टीकृत विचरण

इसको अस्पष्टीकृत विचरण इसलिये कहा जाता है, क्यों Y के मानों में इस विचरण का समाश्रयण रेखा द्वारा स्पष्टीकरण नहीं होता है। आश्रित चर (Y) में परिवर्तन का कितना अंश स्वतन्त्र चर (X) द्वारा निर्धारित होता है, इसका स्पष्टीकरण समाश्रयण रेखा द्वारा होता है, जोकि सूत्र रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\text{स्पष्टीकृत विचरण} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{Y} - \bar{Y})^2}{n}$$

रेखाचित्र 7.4 में समाश्रयण रेखा को मोटी रेखा द्वारा तथा $Y = \bar{Y}$ रेखा के बिन्दु रेखा द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

रेखाचित्र 7.4 में समाश्रयण रेखा द्वारा स्पष्टीकरण तथा अस्पष्टीकृत विचरण प्रत्येक बिन्दु (X_i, Y_i) से समाश्रयण की दूरी मोटी रेखा (Solid line) द्वारा

रेखाचित्र 7.4

तथा प्रत्येक बिन्दु की $Y = \hat{Y}$ से दूरी को बिन्दु रेखा (Dotted line) द्वारा प्रदर्शित किया है। अर्थात्

$$\sum_{i=1}^{n} [Y_i - \bar{Y}]^2 = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - \hat{Y}] + (\hat{Y} - \bar{Y})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y} - \bar{Y})^2$$

अस्तु, कुल विचरण सदैव अस्पष्टीकृत विचरण से अधिक अथवा समकक्ष रहेगा। अतएव,

स्पष्टीकृत विचरण = कुल विचरण – अस्पष्टीकृत विचरण

$$r^2 = \frac{\text{स्पष्टीकृत विचरण}}{\text{कुल विचरण}} = \frac{\sigma_y^2 - S_{yx}^2}{\sigma_y^2} \qquad (7\ 26)$$

को अवधारण गुणाक कहते हैं।

इसका मान 0, (स्पष्टीकृत विचरण का अभाव) तथा 1, [समस्त विचरण समाश्रयण रेखा द्वारा स्पष्ट कर दिया जाय, अर्थात् पूर्ण आसजन (Perfect fit)] के मध्य होता है।

चर Y के कुल विचरण का प्रतिशत जो समाश्रयण रेखा द्वारा स्पष्ट कर दिया जाए, अवधारणा गुणाक $(r)^2$ कहा जाता है। उदाहरणार्थ, यदि अवधारणा गुणाक 25 हो तो इसका तात्पर्य यह है कि चर (Y) में 25% परिवर्तन चर (X) पर आश्रित है। r^2 का परिकलन करने के लिये निम्नांकित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है

$$r^2 = \frac{\beta(\Sigma X_i Y_i) + n\bar{X}\bar{Y}}{(\Sigma Y_i^2 - n\bar{Y}^2\bar{X}\bar{Y}} \qquad (7\ 27)$$

अथवा
$$r^2 = \frac{(\Sigma X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y})}{(\Sigma X_i^2 - n\bar{X}^2)(\Sigma Y_i^2 - n\bar{Y}^2)} \qquad (7\ 28)$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि अवधारणा गुणाक, सहसम्बन्ध गुणाक के वर्ग के बराबर है, इसीलिये इसको r^2 से निरूपित किया जाता है। यदि एक अवस्था में $r^2 = 12$ हो तथा दूसरी अवस्था में $r^2 = 60$ हो तब हम कहते हैं कि दूसरी अवस्था में सहसम्बन्ध पहली अवस्था से पाँच गुणा अधिक है।

न्यूनतम वर्ग आगणक की विशेषाएँ
(Properties of Least Square Estimators)

(i) न्यूनतम वर्ग आगणक अनभिनत (Unbiased) आगणक हैं। अर्थात् $E(\beta) = \beta$

(ii) न्यूनतम वर्ग आगणक रेखीय (Linear) आगणक हैं। अर्थात् β, β का रेखीय फलन है।

(iii) न्यूनतम वर्ग आगणक सर्वोत्तम रेखीय अनभिनत आगणक (Best Linear Unbiased Estimators या BLUE) है। अर्थात् सभी सम्भव अनभिनत आगणकों में β का प्रसरण न्यूनतम है

$$\text{Var}(\beta) = \frac{\sigma_u^2}{\Sigma(X_i - X)}$$ जहाँ σ_u^2 = वास्तविक त्रुटि-पद प्रसरण

कि σ_u^2 का वास्तविक मान ज्ञात नहीं होता। अस्तु, इसका अनभिनत आगणक परिकलित किया जाता है। अर्थात्

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\Sigma(Y_i - \hat{Y})^2}{n-2}$$

और भी, X पर Y के अनुमानित समाश्रयण गुणांक के प्रसरण का अनुमान = S^2_β

जहाँ $$S_\beta = \frac{\sigma_u}{\sqrt{\hat{V}\text{ar}(\beta)}} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{(n-2)\Sigma(X_i - X)^2}} \qquad (7\ 29)$$

को β की मानक त्रुटि (Standard Error) कहा जाता है।

टिप्पणी— (i) यदि X तथा Y के स्थान पर क्रमशः उनके माध्यों से विचलन $x_i = X - \bar{X}$, तथा $y_i = Y - \bar{Y}$ लिये जायें, तब $\text{Var}((\beta) = \frac{\sigma_u^2}{\Sigma x_i^2}$

(ii) यदि हम σ_u^2 का अनभिनत आगणक नहीं लेना चाहते, तब $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n}$, लिया जा सकता है।

समाश्रयण गुणांक β की सार्थकता का t– परीक्षण (t-Test for Testing the Significance of Regression of Coefficient)

इस परीक्षण की विधि इस प्रकार है

(i) H_o निराकरणीय परिकल्पना, β = 0,
H_1 वैकल्पिक परिकल्पना β ≠ 0

(ii) β का परिकलन किया जाये।

(iii) सूत्र,

$$t = \frac{\beta - \beta}{\sqrt{\hat{V}\text{ar}(\beta)}} \qquad (7\ 30)$$

चूँकि निराकरणीय परिकल्पना के अनुसार β = 0, अतः सूत्र को निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$t = \frac{\beta}{\sqrt{\hat{V}\text{ar}(\beta)}} \qquad (7.31)$$

8

बहुरैखिक तथा अरेखीय समाश्रयण एवं सहसम्बन्ध
(Multiple Linear and Non-linear Regression and Correlation)

बहुरैखिक समाश्रयण
(Multiple Linear Regression)

अब हम K चरों का एक-साथ अध्ययन करेंगे। K चर $X_1, X_2, \quad, X_k$ हैं तथा प्रत्येक चर X_i के n मानों $X_{1i}, X_{2i}, \quad, X_{ni}, i = 1, 2, \quad, K$ को एक प्रतिदर्श मान लिया जाए। इस प्रकार ($X_{j1}, X_{j2}, X_{j3}, \quad X_{jk}$) इस प्रतिदर्श का एक अवयव होगा, जोकि K विमीय पराकाश (K Dimensional space) में एक बिन्दु द्वारा अंकित होगा।

यदि हम यह मान लें कि X_1 आश्रित चर है, जिसका मान स्वतन्त्र चरों $X_2, X_3, \quad, X_k$ पर निर्भर करता है, तब X_1 की स्वतन्त्र चरों ($X_2 \quad, X_k$) पर निर्भरता को निम्नांकित रेखीय सम्बन्ध द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

$$X_1 = a_0 + a_2X_2 + a_3X_3 + \quad + a_kX_k + U \qquad (8\ 1)$$

यहाँ $a_0, aa_1 \quad, a_k$ स्थिरांक हैं, जिनको न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। इस सम्बन्ध को $X1$ का $X_2, \quad, X_k$ पर समाश्रयण तल का समीकरण कहा जाता है। इसी प्रकार X_2 का $X_1, X_3, \quad, X_k$ पर आदि सम्बन्ध भी स्थापित किये जा सकते हैं। समीकरण (8 1) द्वारा हम X_1 के सगत मान की प्रागुक्ति अथवा उत्तम आकलन कर सकते हैं।

अधिक व्यापकीकरण के लिये मान लिया कि, $Y, X_1, X_2, \quad, X_k\ (K+1)$ चर है तथा प्रत्येक चर के लिये n प्रेक्षण है, जोकि निम्नांकित रूप में प्रस्तुत किये जा सकते हैं

Y	Y_1	X_j	X_k
Y_1	X_{11}	X_{j1}	X_{K1}
Y_2	X_{12}	X_{j2}	X_{k2}
Y_i	X_{1i}	x_{ji}	X_{ki}
Y_n	X_{1n}	X_{jn}	X_{kn}

यहाँ $X_{ij} = X_i$ का j वा मान

समाश्रयण निदर्श

$$Y_i = \beta_o + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \quad + \beta_j X_{ji} + \ldots + \beta_k X_{ki} + U_i \qquad (8\ 2)$$

आकलित अवशेष $\hat{U}_i$

$$\hat{U}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\beta_o + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki}) \qquad (8\ 3)$$

अवशेषों के वर्ग का योग

$$S = \sum_{i=1}^{n} = U_i^2 = \Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$= \Sigma(Y_i - \beta_o - \beta_1 X_{1i} - \beta_{2i} X_{1i} - \beta_2 X_{2i} - \quad - \beta_k X_{ki})^2 \qquad (8\ 4)$$

न्यूनतम वर्ग विधि के अनुसार $\beta_0, \beta_1, \quad , \beta_k$ का मान आकलित करने हेतु,

$$S = \Sigma(Y_i - \beta_o - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i} - \quad \beta_k X_{ki})^2$$

को $\beta_o, \beta_1, \quad$ तथा β_k, के सापेक्ष आंशिक अवकलन करके अवकलजों को शून्य के बराबर रखने पर निम्नलिखित प्रसामान्य समीकरण प्राप्त होते हैं

$$\Sigma Y_i = n\beta_o + \beta \Sigma X_{1i} + \beta_2 \Sigma X_{2i} + \ldots + \beta_k \Sigma X_{ki}$$

$$\Sigma Y_i X_{1i} = \beta_o \Sigma X_{1i} + \beta_1 \Sigma X^2_{1i} + + \beta_2 \Sigma X_{2i} X_{1i} + \ldots + \beta_k \Sigma X_{ki} X_{1i}$$

$$\Sigma Y_i X_{ki} = \beta_o \Sigma X_{ki} + \beta_1 \Sigma X_{1i} X_{ki} + \beta_2 \Sigma X_{2i} X_{ki} + \ldots + \beta_k \Sigma X^2_{ki} \qquad (8\ 5)$$

इन प्रसामान्य समीकरणों को हल करके $\beta_o, \beta_1, \quad \beta_k$, के आकलित मान ज्ञात किये जाते हैं।

$$\text{आकलन की मानक त्रुटि} = \sqrt{S_u} = \sqrt{\frac{\Sigma(U_i)^2}{n}} \qquad (8\ 6)$$

अवधारण गुणक $R^2_{y\,123\ldots k} = \dfrac{S_y^2 - S_u^2}{S_y^2}$

जहाँ $S_y^2 = \dfrac{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}{n}$

बहुसहसम्बन्ध
(Multiple Correlation)

Y तथा $\hat{Y}$ के मध्य सरल सहसम्बन्ध को Y तथा ($X_1, X_2, \ldots X_k$) का बहुसहसम्बन्ध (Multiple correlation) कहा जाता है, जिसके सहसम्बन्ध गुणांक को $R_{y\,123\ldots k}$ द्वारा सूचित किया जाता है। अतः

Y तथा $X_1, X_2, \ldots$ व X_k का बहुसहसम्बन्ध गुणांक,

$$R_{y\,123\ldots k} = \frac{Cov(Y, \hat{Y}_i)}{\sqrt{Var(Y)\,Var(\hat{Y})}} \tag{8.7}$$

सरलता हेतु हम केवल निम्नलिखित तीन चरों का विस्तृत अध्ययन करेंगे

मान लो Y, X_1, X_2 तीन सम्बद्ध चर हैं। जिनमें प्रत्येक के n मान हैं

$Y: Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3 \ldots Y_n$
$X_1: X_{11} \quad X_{12} \quad X_{13} \ldots X_{1n}$
$X_2: X_{21} \quad X_{22} \quad X_{23} \ldots X_{2n}$

तब, Y के X_1 व X_2 पर समाश्रयण निदर्श अथवा समाश्रयण तल का समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + U_i \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{8.8}$$

न्यूनतम वर्ग विधि के अनुसार β_0, β_1 तथा β_2 के आकलित मान निकालने के लिए 'अवशेषों के वर्गों का योग' (Sum of the squares of the residuals)

$$S = \Sigma U_i^2 = \Sigma (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i})^2$$

को β_0, β_1, तथा β_2 के सापेक्ष आंशिक अवकलजों को शून्य के बराबर रखने पर,

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2\Sigma(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i}) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = -2\Sigma X_{1i}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i}) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_2} = -2\Sigma X_{2i}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i}) = 0$$

अस्तु प्रसामान्य समीकरण निम्नांकित रूप में प्रस्तुत किए जा सकते हैं

$$\Sigma Y_t = n\beta_o + \beta_1 \Sigma X_{1t} + \beta_2 \Sigma X_{2t}$$

$$\Sigma Y_t X_{1t} = \beta_o \Sigma X_{1t} + \beta_1 \Sigma X_{1t}^2 + \beta_2 \Sigma X_{2t} X_{1t}$$

$$\Sigma Y_t X_{2t} = \beta_o \Sigma X_{2t} + \beta_1 \Sigma X_{1t} X_{2t} + \beta \Sigma X_{2t}^2 \qquad (8\ 9)$$

जिनको हल करके β_o, β_1, तथा β_2, के मान ज्ञात किए जा सकते है।

$$\text{आकलन की मानक त्रुटि} = \sqrt{S_u^2} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n}} \qquad (8\ 10)$$

तथा अवधारणा गुणक

$$R_{y\ 12}^2 = \frac{S_y^2 - S_u^2}{S_y^2} \qquad (8\ 11)$$

बहु सहसम्बन्ध का गुणांक[1]

$$R_{y\ 12} = \sqrt{\frac{S_u^2}{S_y^2}} \qquad (8\ 12)$$

$$= \frac{r_{y1} + r_{y2}2 - 2r_{r1}\ r_{12}\ r_{2y}}{1 - r_{12}^2}$$

---

1 (i) यदि तीन चरों को X_1, X_2 तथा X_3 से प्रदर्शित किया जाए तब

$$R_{1\ 23} = \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}\ r_{23} r_{31}}{1 - r_{23}^2} \text{ होगा}$$

(ii) यदि तीन चरों को Y,X तथा Z से प्रदर्शित किया जाए तब

$$R_{YXZ} = \frac{r^2YX + r^2YZ - 2rYXrXZ\ rZY}{1 - r^2XZ}$$

अथवा $R_{Y.XZ}$ का मान इस प्रकार भी प्रस्तुत किया जा सकता है

$$R^2_{YXZ} = \frac{\beta_1 [\Sigma X_1 Y_t - n\hat{X}\hat{Y}] + \beta_2 [\Sigma Z_1 Y_t - n\hat{Z}\hat{Y}]}{\Sigma Y_t^2 - nY^2}$$

यहाँ $Y = Y_1, Y_2, \quad , Y_n$

$X = X_1, X_2, \quad , X_n$

$Z = Z_1, Z_2, \quad , Z_n$

यहाँ r_{y1} = Y तथा X_1 का सहसम्बन्ध गुणाक
r_{12} = X_1 तथा X_2 का सहसम्बन्ध गुणाक
r_{2y} = X_2 तथा Y का सहसम्बन्ध गुणाक

आंशिक सहसम्बन्ध
(Partial Correlation)

यदि X,Y,Z तीन सगत चरों के किन्हीं दो चरों मे सहसम्बन्ध स्थापित करना हो तब, चूँकि तीनों चर परस्पर सम्बन्धित हो सकते है, अर्थात Y तथा X के सहसम्बन्ध पर Z का प्रभाव पड़ना स्वाभाविक है। इस प्रभाव को एकघाती मानकर समाश्रयण रेखाओं द्वारा विलुप्त किया जा सकता है। अस्तु,

दो चरों X तथा Y के मध्य सहसम्बन्ध, जबकि अन्य चरों (यहाँ Z) के प्रभाव का विलोपन (किसी विशिष्ट रूप से) कर दिया गया हो, X तथा Y का अन्य चरों के प्रति आंशिक सहसम्बन्ध कहलाता है।

आंशिक सहसम्बन्ध गुणाक, XZ तथा YZ के मध्य सरल सहसम्बन्ध गुणाक द्वारा मापा जाता है, यहाँ,

XZ = X का Z पर आकलन का अवशेष
(Residual of X on Z)
तथा YZ = Y का Z पर आकलन का अवशेष
(Residual of Y on Z)

अर्थात्

$$r_{YX.Z} = \frac{Cov\ (XZ, YZ)}{\sqrt{Var\ (XZ)\ Var\ (YZ)}} = \frac{rYX - rYZ\ rXZ}{\sqrt{(1 - r^2YZ)(1 - r^2XZ)}}$$

मानलो Y की X तथा Z पर समाश्रयण रेखा

$$Y = ayx\ Z + byx\ ZX + byz\ XZ \qquad (8\ 13)$$

Y की Z पर समाश्रयण रेखा

$$Y = ayz + byz\ Z \qquad (8\ 14)$$

तथा Y की X पर समाश्रयण रेखा

$$Y = ayx + byx\ X \qquad (8\ 15)$$

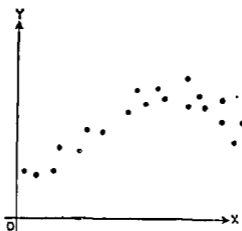
आंशिक अवधारणा का गुणक,

$$R^2yx\ z = \frac{S^2_{YZ} - S^2_{YXZ}}{S^2_{YZ}}$$

यहाँ
S^2_{YXZ} = Y का X व Z द्वारा अस्पष्टीकृत विचलन

S^2_{YZ} = Y का द्वारा अस्पष्टीकृत विचलन
X चर को सम्मिलित करने पर,
$S^2_{YZ}-S^2_{YXZ}$ = Y के अस्पष्टीकृत विचलन में कमी

अरेखीय समाश्रयण
(Non-Linear Regresssion)

अब तक हमने केवल विभिन्न चरों के इस प्रकार के सम्बन्धों को अध्ययन किया है, जिनको सरल रेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। परन्तु आर्थिक क्षेत्र में अरेखीय सम्बन्ध भी समय-समय पर दृष्टिगोचर होते है। क्योंकि व्यवहार में रेखीय सम्बन्धों का पाया जाना कठिन है। सैद्धान्तिम रूप (Theoretical Consideration) से सम्भव नहीं होने पर *प्रकीर्ण-आरेख (Scatter diagram) द्वारा अनुमान लगाया जा सकता है कि* दो चरों में रेखीय सम्बन्ध नहीं माना जा सकता।
जैसे रेखा चित्र (8 1)।

रेखाचित्र 8 1

इस प्रकार की अवस्था में हम विभिन्न प्रकार के अरेखीय फलनों का आसजन कर सकते हैं। कुछ फलनों को रेखीय फलनों में परिवर्तित करके तथा कुछ को सीधे ही आसजन किया जाता है, क्योंकि उनको रेखीय रूप में परिवर्तित करना सम्भव नहीं होता।

अरेखीय सम्बन्धों के कुछ उदाहरण अग्राकित हैं

(1) K घात का बहुपद (A Polinominal of degree K)

(1) ओरखिक समाश्रयण में सबसे सरल वह है जिसमें एक चर दूसरे का बहुघाती व्यंजक हो। अतएव Y का X पर बहुपद (Polynomial) समाश्रयण,

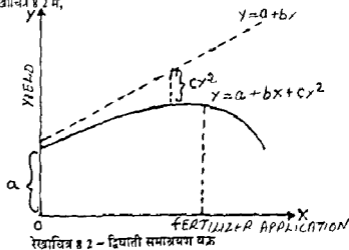
$$Y=\beta_{o}, 0+\beta_{1}X+\beta_{2}X^{2}+ \quad +\beta_{k}X^{k} \quad \beta_{k}\neq 0 \qquad (8\ 16)$$

समीकरण द्वारा निरूपित है, जिसमें गुणक β_{s} अचर हैं। न्यूनतम वर्ग विधि से इन अचरों को इस प्रकार निर्धारित किया जाता है कि अवशेषों के वर्गों का योग न्यूनतम हो। समीकरण (8 16) को K घात का बहुपदी (A polynomial of degree K) कहते हैं। यदि K-2 हो तब

$$Y=\beta_{o}, +\beta_{1}X+\beta_{2}X^{2} \qquad (8\ 17)$$

एक सरल द्विघात (Simple quadratic) समीकरण कहलाता है।

मान लो, खाद के उपयोग की मात्रा तथा गेहूँ की उपज के आँकड़े ज्ञात हैं जोकि n समान खेतों (Similar farms) द्वारा प्राप्त किए गये हैं। पूर्व अनुभव द्वारा ज्ञात है कि खाद की कम मात्रा के प्रयोग द्वारा उपज में वृद्धि होती है, परन्तु जैसे-जैसे खाद की मात्रा में वृद्धि की जाती है, वैसे- वैसे ही उपज की मात्रा में वृद्धि दर कम होती जाती है। इस स्थिति को रेखाचित्र 8 2 में व्यक्त किया गया है। खाद का अधिक उपयोग उपज में कमी भी कर सकता है। उदाहरणार्थ, रेखाचित्र 8 2 में,

रेखाचित्र 8 2 – द्विघाती समाश्रयण वक्र

खाद की मात्रा में X_{0} मात्र से अधिक वृद्धि करने पर उपज में कमी होने लगती है। इस प्रकार की स्थिति में हम द्विघाती समाश्रयण का आसंजन करते हैं तथा समीकरण

$$Y=a+bX+cX^{2}$$

द्वारा निरूपित करते हैं।

X	Y	X^2	X^3	X^4	XY	X^2Y
0	110	0	0	0	0	0
2	113	4	8	16	226	452
4	118	16	64	256	472	1888
6	119	36	216	1296	714	4284
8	120	64	512	4096	960	5880
10	118	100	1000	10000	1180	11800
30	698	220	1,800	15,664	3,552	24,304

दो चरों में द्विघाती समीकरण (Two-Variable Quadratic)

$$Y = a + b_1X + b_2Z + c_1X^2 + c_2Z^2 + c_3XZ \qquad (8\ 18)$$

इस प्रकार के समीकरण का आकलन करने के लिये इसका रूपान्तरण (Transformation) एक रैखिक सम्बन्ध में निम्न प्रकार किया जा सकता है तत्पश्चात् न्यूनतम विधि द्वारा सगत मनो का आकलन किया जा सकता है

$$X_1=X,\ \ X_2=Z,\ \ X_3=X^2,\ \ X_4=Z^2,\ \ X_5=XZ$$

अर्थात् समीकरण (8 18) को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + c_1X_3 + c_2X_4 + c_3X_5 \qquad (8\ 19)$$

यहाँ बहुरैखिक समाश्रयण सूत्रों का अनुप्रयोग हो सकता है।

दो चरों का द्विघात सम्बन्ध तब लिया जा सकता है, जबकि यह आशंका हो कि दो चर पारस्परिक रूप में एक दूसरे को प्रभवित (Interact) कर रहे हैं। उपर्युक्त उदाहरण में पद c_3XZ 'अन्योन्यक्रिया' (Interaction) पद है।

(3) गुणोत्तर वक्र (Geometric Curve)

$$Y = AX^B \qquad (8\ 20)$$

इस प्रकार के गुणोत्तर वक्र को दोनों ओर लघु (log) लेकर, रेखीय प्रकार में रूपान्तर कर लेते है, इस प्रकार रूपान्तरण को 'द्विरूपी लघु रूपान्तरण' (Double log transformation) कहते है

$\log Y = \log A + B\log X$ अथवा $\log_e Y = a + b\log_e X$

जिसको रेखाचित्र (8 3) में ग्राफ पर व्यक्त किया गया है। इस रेखा का ढाल X के सापेक्ष Y में प्रतिशत परिवर्तन व्यक्त करता है। अर्थात् ढाल X के पदों में Y चर की लोच है।

$Z = \log Y$, $a = \log A$, $b = B$ तथा $W = \log X$ रखने पर नवीन रेखीय समीकरण $Z = a + bW$ हो जाता है, जिस पर न्यूनतम वर्ग विधि के प्रयोग द्वारा a, तथा b के आकलित मान ज्ञात किये जा सकते हैं।

उदाहरण 2– निम्नांकित आँकड़ों के लिये पैरेटो वक्र $N = AX^{\alpha}$ के प्राचलों का आकलन कीजिये

आय (X)	150	500	1,000	2,000
पुरुषों की सख्या जिनकी आय X से अधिक है (N)	14,00,000	8,25 000	1,73,000	35,500

हल— यहाँ $N = AX^{\alpha}$

$\log^{10} N = \log_{10} A$ —— $\alpha\log^{10} X$

अथवा $Y = \alpha + \beta Z$

यहाँ $Y = \log_{10} N, \alpha = \log_{10} A, \beta = -a,$ तथा $Z = \log_{10} X$

न्यूनतम वर्ग विधि के अनुसार प्रसामान्य समीकरण है

$$\Sigma Y = \Sigma \alpha + \beta \Sigma Z$$

$$\Sigma ZY = \alpha \Sigma Z + Z^2$$

वांछित गणना निम्न सारणी में व्यक्त की गई है

X	N	$Z=log_{10}X$	$Y=log_{10}X$	X^2	XY
150	14,00,000	2 17609	6 14613	4 73537	13 37453
500	8,25,000	2 69897	5 91645	7 28444	15 96832
1,000	1,73,000	3 00000	5 23805	9 00000	15 71415
2,000	35,500	3 30103	4 55145	10 89679	15 02447
		11 17609	21 85208	31 91660	60 08147

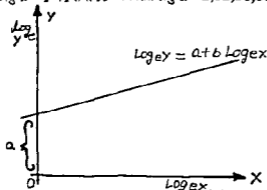
मान रखने पर,

21 85208=4α +11 17609 β

60 08417=11 17609α +31 91660 β

हल करने पर हम प्राप्त करते हैं

β=−1 41, α = 9 402

अस्तु *a = 1 41* तथा *A* = विपरीत लघु *α = 2,52,36,00,000*

रेखाचित्र 8 3- आश्रित तथा स्वतन्त्र चरों में लघु समाश्रयण

(4) चरघातांकीय वक्र (Exponential Curve)[1]

$Y = ce^{\alpha x}$ अथवा $Y = cb^x$ अथवा $Y = cb^x$

इस प्रकार के वक्रों का भी log लेने पर रेखीय रूप हो जाता है

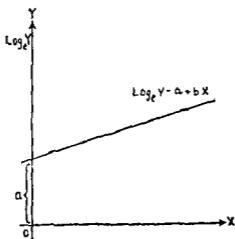
$\log_{10} Y = \log_{10} c + \alpha X \log_{10} e$ अथवा $\log Y = a + bX$

अथवा $Z = a + bX,$

यहाँ $Z = \log_{10}, Y, a = \log_{10} c,$

तथा $b = a \log_{10} e$

यदि प्रतिदर्श में Y के मान लगभग गुणोत्तर श्रेणी में हो तथा X के मान समान्तर श्रेणी में हों तब चर घाताकी रूप का समीकरण माना जा सकता है।

एक समाश्रयण रेखा जिसमें आश्रित चर लघु गुणक रूप में हो, रेखाचित्र 8 4 में दर्शाई गई है। log Y को Y-अक्ष पर तथा X को X अक्ष पर लिया गया है।

रेखाचित्र 8 4– आश्रित चर में लघु समाश्रयण

---

1 **Semi log Transformation** •
यहाँ हमें ज्ञात होता है कि रूपान्तरण में केवल आश्रित चर का लघु लिया गया है, अत इसे आश्रित चर लघु (logarithmic dependent variable) रूपान्तरण भी कहा जाता है। यदि वक्र निम्नांकित रूप में हो, $Y = a + b \log_e X$ तब इसे स्वतत्र चर लघु रूपान्तरण कहा जाता है।

इस रेखा का ढाल b, X के प्रति इकाई परिवर्तन के फलम्वरूप Y में प्रतिशत परिवर्तन का माप हैं। उदाहरणार्थ, यदि Y-अक्ष GNP का लघु तथा X- अक्ष समय को मापता हो तब ढाल वृद्धि दर (प्रति इकाई समय के फलम्वरूप प्रतिशत परिवर्तन)[Is the growth rate (percentage change per unit time) of GNP] प्रदर्शित करेगा।

इसी प्रकार यदि किसी समाश्रयण रेखा में स्वतन्त्र चर log रूप में हो तब समाश्रयण रेखा का ढाल Y में निरपेक्ष परिवर्तन तथा X में प्रतिशत परिवर्तन का अनुपात होगा। उदाहरणार्थ, यदि Y चर उपभोग व्यय तथा X चर आय को निरूपित करते हों तब रेखा का ढाल उपभोग व्यय में प्रत्याशित वृद्धि तथा आय में प्रतिशत वृद्धि का अनुपात प्रदर्शित करेगा।

(5) व्युत्क्रम वक्र (Reciprocal Curves)[1]

(i) $Y = \alpha + \beta \dfrac{1}{x}$

(ii) $Y = aX + \beta \dfrac{1}{X}$

(iii) $Y = aX^2 + \beta \dfrac{1}{X}$

इस प्रकार के वक्रों का आकलन करने हेतु सीधे न्यूनतम वर्ग विधि का उपयोग किया जा सकता है। जैसे

(iii) के लिये प्रसामान्य समीकरण

$$S = \Sigma \left(Y_i - \alpha X_i^2 - \frac{\beta}{X_i}\right)^2$$

को α तथा β के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर प्राप्त हो जाती हैं

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 = -2\Sigma X_i^2 \left(Y_i - \alpha X_i^2 - \frac{\beta}{X_i}\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 = -2\Sigma \frac{1}{X_i}\left(Y_i - \alpha X_i^2 - \frac{\beta}{X_i}\right)$$

अर्थात् $\qquad \Sigma X_i^2 Y_i = \alpha \Sigma X_i^4 + \beta \Sigma X_i$

$$\Sigma \frac{Y_i}{X_i} = \alpha \Sigma X_i + \beta \Sigma \frac{1}{X_i^2}$$

---

1 यदि वक्र $\frac{1}{Y} = a + bX$ हो तब पहले $\frac{1}{Y} = Z$ रखकर उसको रेखीय रूप में लिखा जाता है

$$Z = a + bX$$

तत्पश्चात् मानक विधि का उपयोग किया जाता है।

9

सामान्य रैखिक निदर्श
(General Linear Models)

मान लो, Y तथा अन्य p चरों $X_1, X_2, \ldots, X_p$ में रैखिक सम्बन्ध है अत हम निम्न निदर्श पर विचार कर सकते हैं

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_p X_{pi} \qquad (9\ 1)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

चूँकि Y के प्रेक्षित अथवा वास्तविक मान तथा प्रागुक्त अथवा आकलित मान में अन्तर होता है जिसे त्रुटि पद कहा जाता है अस्तु, निदर्श (9 1) निम्न प्रकार लिखा जा सकता है,

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_p X_{pi} + U_i \qquad (9\ 2)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

यहाँ β गुणक तथा u बटन (Distribution) के प्राचल अज्ञात हैं। इन अज्ञात स्थिरांकों का आकलन ही हमारी समस्या है।

(9 2) में n समीकरणों को आव्यूह रूप में निम्न प्रकार प्रस्तुत किया जा सकता है

$$Y = X\beta + U \qquad (9\ 3)$$

यहाँ

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & \ldots & X_{p1} \\ X_{12} & X_{22} & \ldots & X_{p2} \\ \vdots & & & \\ X_{1n} & X_{2n} & \ldots & X_{pn} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_p \end{matrix} \quad \dot{U} = \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_n \end{matrix}$$

विशेष रूप में, मान लो चर Y का कोई विशिष्ट प्रेक्षित मान दो भागों से बना एक यादृच्छिक चर है

$$Y_i = X_i \beta + u_i \qquad (9\ 4)$$

$$i = 1, 2, \ \ , n$$

यहाँ $X_i\ \beta$ को व्यस्थित भाग तथा u_i को यादृच्छिक भाग कहा जा सकता है। व्यवस्थित भाग रैखिक सम्बन्ध द्वारा निर्धारित होता है तथा द्वितीय भाग यादृच्छिक सघटक है, जिसको प्राय त्रुटि पद कहा जाता है, यह त्रुटि रैखिक सम्बन्ध की मान्यता द्वारा उत्पन्न होती है, अर्थात हम यह मान लेते हैं कि चरों में रेखीय सम्बन्ध है, परन्तु वास्तविक मान तथा आकलित मान में सदैव अन्तर होता है। यदि किसी समीकरण में त्रुटि पद लिया गया हो तब वह समीकरण प्रसम्भाव्य (Stochastic) कहलाता है, अन्यथा यथातथ (Exact) समीकरण कहा जाता है।

व्यवस्थित संघटक के कुछ गुण (Some Properties of the Systematic Component)

यहाँ यह मान लिया जाता है कि β गुणक स्थिराक हैं तथा प्रतिदर्श चयन करने के पश्चात् चरों के प्रेक्षित मान स्थिर हैं, अर्थात् X_t के मापन में कोई त्रुटि नहीं है। परन्तु भौतिक प्रयोगों के समान आर्थिक तथा व्यापारिक सांख्यिकी में नियन्त्रित प्रयोग प्राय सम्भव नहीं हैं। अतएव यह मान लिया जाता है कि X एक यादृच्छिक चर है तथा इसका अपना एक प्रायिकता बटन (Probability Distribution) है, परन्तु चर X_i त्रुटि पद u_t स्वतन्त्र रूप से वटित है। अर्थात् उनके मध्य सहसम्बन्ध नहीं है। इस मान्यतानुसार β के आकलित मानों के कुछ गुण परिवर्तित हो जाते है। विशिष्ट रूप से, अनभिनतता (Unbiasedness) तथा सगतता (Consistency) जैसे गुणों को X के मानों से, जो प्रतिदर्श में आये हैं, सशर्त निर्वचन करना चाहिये।

त्रुटि पद की मान्यताएँ (Assumption Regarding Error Term)

जैसा कि हम अध्याय 7 तथा 8 में अध्ययन कर चुके हैं कि प्रायोगिक स्थितियों में त्रुटियों के दो कारण हो सकते हैं (a) आश्रित चर Y में मापन की त्रुटियाँ तथा/ अथवा (b)

निदर्श के सही विनिर्देशन का अभाव। इस अध्याय में विचारयुक्त सिद्धान्तों की सम्पुष्टि हेतु त्रुटि पद की कुछ मान्यताओं की सन्तुष्टि करना आवश्यक है।

(1) त्रुटि पद एक यादृच्छिक चर है, जिसका सैद्धान्तिक माध्य (Theoretical mean) $\mu=0$ तथा परिमित प्रसरण (Finite variance) σ_u^2 है। अर्थात्,

$$E(U_i) = 0 \quad i=1,2, \ldots ,n$$

तथा
$$E(UU') = \sigma_u^2 I_n$$

यहाँ U एक $n \times 1$ क्रम का स्तम्भ सदिश (Column vector) तथा U^1 एक $1 \times n$ क्रम का पंक्ति सदिश (row vector) है तथा गुणनफल UU' एक $n x n$ क्रम का सममित (Symmetric) आव्यूह है। अर्थात्,

$$E(UU') = \begin{matrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2) & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) & E(u_2u_n) \\ \\ E(u_nu_1) & E(u_{n2}) & E(u_n^2) \end{matrix} \quad (9\ 5)$$

$$= \begin{matrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \sigma^7 \end{matrix} = \sigma^2 I_n$$

$$\text{यहा } I_n = \begin{matrix} 1 & 0 & \sigma^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad nxn$$

$E(u_i^2)=\sigma^2$ का आशय यह है कि प्रत्येक u_i का प्रसरण समान है। प्रसरण समान होने के गुण को समविचालिता (Homoscedasticity) कहते हैं।

(2) त्रुटि पद u_i के प्रतिदर्श मूल्य $i=1,2, \ldots ,n$ स्वतन्त्र रूप से वटित हैं। अर्थात् u_i युग्मानुसार असहसम्बन्धित हैं। अर्थात्

$E(u_iu_j)=0, \; i\neq j$

जैसाकि उपर्युक्त आव्यूह में व्यक्त किया गया है। आव्यूह (9 5) को प्रसरण सहप्रसरण आव्यूह (Variance Covariance Matrix) कहा जाता है।

यदि u_i तथा u_j असहसम्बन्धित (Uncorrelated) नहीं हैं। अर्थात् यदि $E(u_i u_j) \neq 0$, तो त्रुटियों को स्व सहसम्बन्धित (Autocorrelated) अथवा कभी-कभी क्रमिक: सहसम्बन्धित (Searially correlated) कहा जाता है।

(3) X_i एक निश्चित सख्याओं का समुच्चय है, अर्थात् विभिन्न प्रतिदर्शों में Y के मान का परिवर्तन U के मान में परिवर्तन है तथा आकलकों के गुण व परीक्षण X पर आधारित है।

(4) X की कोटि $K<n$ है। अर्थात् प्रेक्षणों की सख्या प्राचलों की सख्या से अधिक अथवा बराबर है तथा X_i चरों में कोई रैखिक सम्बन्ध नहीं हैं।

(5) प्रत्येक त्रुटि पद का बटन प्रसामान्य है, यह मान्यता सदैव आवश्यक नहीं है। यह मान्यता केवल परिकल्पनाओं के परीक्षण को लघु आकार के प्रतिदर्शों के लिये विधिसगत (Valid) होना निश्चित करती है। वृद्धाकार के प्रतिदर्शों के लिये 'केन्द्रीय सीमा प्रमेय' (Central limit theorem) लागू हो जाती है।

β_i के सरल न्यूनतम वर्ग आकलक (Simple Least-Squares Estimators of β SLS)

मान्यता (1) के कारण न्यूनतम वर्ग आकलन 'अनाभिनत आकलन' (Unbiased Estimates) है। यदि मान्यता (2) की भी पूर्ति होती हो तब न्यनतम वर्ग आकलन 'दक्ष आकलन' (Efficient Estimates) हैं न्यूनतम वर्ग आकलक सर्वोत्तम रैखिक अनभिनत आकलक (Best linear unbiased estimators अथवा BLUE) हैं। अर्थात् समस्त रैखिक अनभिनत आकलनों में β का प्रसरण न्यूनतम है। रैखिक आकलन प्रेक्षित मानों Y_1, Y_2, Y_n के रैखिक फलन होते हैं।

प्रमेय– $\hat{\beta}$, β का सर्वोत्तम रैखिक अनभिनत आकलक है।

उपपत्ति– मान लो $\beta = (\beta_1, \beta_2, . \beta_p)$ β के आकलनों का एक स्तम्भ सदिश है, तब हम आकलित चर Y का मान इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$Y = \hat{X}_{\beta} + e \qquad . (9 6)$$

जबकि वास्तविक निदर्श निम्न प्रकार है।

$$Y = X_{\cdot b} + U$$

(9 6) से अवशेषों के वर्गों का योग

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e'e$$

$$= (Y - X_{\beta})'(Y - X\beta)$$
$$= Y'Y - \beta'X'Y - Y'X\beta + \beta'X'X\beta$$
$$= Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta \qquad (9\ 7)$$

यहाँ $\beta'X'Y$ एक अदिश है तथा अपने पक्षान्तरण (Transpose) $Y'X\beta$ के बराबर हैं। β का वह मान निकालने के लिये जो कि अवशेषों के वर्गों के योग को न्यूनतम करता है, (9 7) को β के सापेक्ष अवकलित करके आंशिक अवकलज को शून्य के बराबर रखने पर, प्राप्त होता है,

$$\frac{\partial e'e}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'X\beta = 0$$

अथवा $X'X\beta = X'Y$

अथवा $\beta = (X'X)^{-1}X'Y \qquad (9\ 8)$

(9 7) न्यूनतम वर्ग आकलकों का आधारभूत तथ्य है।[1]

SLS आकलक (β) के गुण निम्नांकित हैं

(i) रैखिकता (Linearity)

हमें प्राप्त है,

$$\beta = (X'X)^{-1}X'Y$$

Y का मान रखने पर

$$\beta = (XX)^{1} X (X + u)$$

$$= (XX)^{1}(XX) + (XX)^{1}Xu$$
$$= + (XX)^{1}Xu \qquad (9\ 9)$$

यहाँ $(X'X)^{-1}(X'X) = I_b$ (एक आव्यूह)

अत β अज्ञात β तथा विक्षोभ पदों (Disturbance terms) $u_1, u_2, \ u_n$ का एकघातीयफलन (Linear function) है।

---

1 समीकरण (9 7) स्तम्भ सदिश है परन्तु वैकल्पिक रूप से यदि हम

$$\frac{\partial(e'e)}{\partial \beta'} = -2Y'X + 2\beta'X'X = 0$$

अथवा $\beta' = Y'X(X'X)^{-1}$

लिखते तो पंक्ति सदिश प्राप्त होता।

(2) अनाभिनतता (Unbiasedness)

$$E(\hat\beta) = \beta$$

अर्थात् $\hat\beta$, β का एक अनाभिनत आकलक है।

त्रुटि पद की मान्यता (3) के अनुसार विभिन्न प्रतिदर्शों के लिये X का मान स्थिर है। परन्तु प्रतिदर्श u_i के एक विभिन्न समुच्चय की रचना करेगा।

अन्तु, विभिन्न $\hat\beta$ सदिश होंगे।
समीकरण (9 9) से

$$E(\hat\beta) = +(X'X)^{-1} X'E(u) \quad (\quad X \text{ स्थिर है}$$

अथवा $\quad E(\hat\beta) = \beta \qquad (\quad E(u) = 0 \qquad (9\ 10)$

(3) Var $(\hat\beta)$ न्यूनतम है।

अब $\quad E[(\hat\beta - \beta)(\hat\beta - \beta)']$

$$= \begin{bmatrix} E(\hat\beta_1-\beta_1)^2 & E(\hat\beta_1-\beta_1)(\hat\beta_2-\beta_2) & E(\hat\beta_1-\beta)(\hat\beta_p-\beta_p) \\ E(\hat\beta_2-\beta_2)(\hat\beta_1-\beta_1) & E(\hat\beta_2-\beta_2)^2 & E(\hat\beta_2-\beta_2)(\hat\beta_p-\beta_p) \\ E(\hat\beta_p-\beta_p)(\hat\beta_1-\beta_1) & E(\hat\beta_p-\beta_p) & E(\hat\beta_2-\beta_2)(\hat\beta_p-\beta_p) \end{bmatrix} \qquad (9\ 11)$$

यहाँ $E(\hat\beta_i-\beta_i)^2 = \hat\beta_i$ का प्रसरण (*Variance of* β_i), $i = 1,2, ..., p$
तथा $E(\hat\beta_i-\beta_i) = \beta_j) = \hat\beta_i$ तथा β_j को सहप्रसरण

(Covariance of β_i and $\hat\beta_j$)

इस प्रसरण तथा सहप्रसरण आव्यूह को हम $V(\hat\beta)$ द्वारा निरूपित करते हैं,

अत,

$$V(\hat\beta) = E[(\hat\beta - \beta)(\hat\beta - \beta)'] \qquad ..(9\ 12)$$

पुन: समीकरण (9 9) से

$$\hat\beta - \beta = (X'X)^{-1}X'u$$

$$V(\hat\beta) = E(X'X)^{-1} X'Uu'X(X'X)^{-1}] \text{ (नियम } (ABC)' = C'B'A' \text{ से)}$$
$$= (X'X)^{-1} X'E(uu')X(X'X)^{-1}$$
$$= (X'X)^{-1} X'\sigma^2 I_n X(X'X)^{-1} \qquad (\quad E(uu') = \sigma^2 I_n$$
$$= \sigma^2 I_n (X'X)^{-1} \qquad .(9\ 13)$$

हमें ज्ञात है कि आव्यूह $(X'X)^{-1}$ के मुख्य विकर्ण के i वें पद को $\sigma^2 I_n$ से गुणा करने पर $\hat{\beta}_i$ का प्रसरण ज्ञात किया जा सकता है।

यह सिद्ध करने के लिये कि $\hat{V}(\beta)$ न्यूनतम है, मान लो, निम्न प्रकार परिभाषित b कोई स्वेच्छा आकलक है

$$B=[(X'X)^{-1} X'+B]Y \tag{9 14}$$

यहाँ β तथा b का अन्तर BY है तथा b रैखिक तथा अनभिनत आकलक है। (9 14) में Y का मान रखने पर

$$b=[X'X]^{-1} X'' +B](X\beta+u)$$

अथवा $b=(X'X)^{-1}X'X\beta + B\kappa\beta (X X)^{-1} X'u+Bu$

अथवा $b=\beta BX\beta+ (X'X)^{-1} X'u+Bu]$ (9 15)

अत $E(b)=\beta+BX\beta+(X'X)^{-1} X' E(u) +BE(u)$

$=\beta$ ($E(u)=0$ तथा $BX = 0$)

अतएव b, अनभिनत आकलक तब ही होगा जबकि $BX=0$

b का प्रसरण-सहप्रसरण आव्यूह निम्न प्रकार प्रस्तुत किया जा सकता है।

$$V(b)= E[(b-\beta)(b-\beta)]$$

यहाँ $b-\beta = (X'X)^{-1} X'u + Bu$ [26 15 से]

अतएव $V(b)=E[\{(X'X)^{-1} X'u + Bu\}(X'x)^{-1} X'u +Bu\}']$

$=E[\{(X'x)^{-1} X'+B)uu'\{(X'X)^{-1}X'+B)'\}]$

$= \{(X'X)^{-1} X'+B\}E(uu)'\{(X'X)^{-1} X'X'+B\}$

$= \sigma^2 I_n$

$[(X'X)^{-1}+(X'X)^{-1}BX+(X X)^{-1}B'X'+BB']$

$= \sigma^2 I_n [(X'X)^{-1} +BB')$

($BX=B'X' = 0$ (9 16)

यहाँ BB' एक वर्ग होने के फलस्वरूप धनात्मक है। अस्तु,

$V(b)=V(\hat{\beta})$ + एक धनात्मक मान

अथवा $V(\hat{\beta}) < V(b)$ (9 17)

सार्थकता परीक्षण तथा विश्वास्यता अन्तराल (Significance Tests and Confidence Intervals)

सार्थकता परीक्षण तथा विश्वास्यता अन्तराल के लिये हम मान लेते हैं कि u_i माध्य 0 तथा प्रसरण $\sigma^2 I_n$ सहित प्रसामान्य रूप से बटित है, जिसको प्रतीत रूप में निम्न प्रकार प्रस्तुत किया जा सकता है,

$$u_i \sim N[0, \sigma^2 I_n] \qquad (9.18)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

अतएव n आकार के यादृच्छिक प्रतिदर्श के लिये सम्भाविता फलन इस प्रकार है,

$$L = \frac{1}{2\pi\sigma^2}^{n/2} \exp \frac{-uu'}{2\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2}^{n/2} \exp \frac{-(Y-X\beta)}{2\sigma^2}$$

इस सम्भाविता फलन को β के सापेक्ष महत्तम करना, $(Y-X\beta)'(Y-X\beta)$ को न्यूनतम करने के बराबर है। अस्तु β के महत्तम सम्भाविता आकलन (Maximum likelihood estimates) तथा न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्राप्त आकलक एक समान है।

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} X u$$

द्वारा ज्ञात होता है कि प्रत्येक आकलन $\hat{\beta}_i$, β_i तथा u के रैखिक फलन का योग है, जिसका बटन बहुचर प्रसामान्य बटन है इस प्रकार $\hat{\beta}$ का बटन प्रसामान्य बटन है जिसका माध्यम β_i तथा प्रसरण $a_{ii}\sigma^2$ हैं, यहाँ a_{ii}, आव्यूह $(X'X)^{-1}$ के मुख्य विकर्ण का i वाँ पद है।

अत $\hat{\beta}$ जिसका बटन बहुचर प्रसामान्य बटन है।

अर्थात् $$\hat{\beta} \sim N[\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1}] \qquad (9.19)$$

यदि σ^2 का मान ज्ञात हो तब हम β के लिये सार्थकता परीक्षण तथा विश्वास्यता अन्तराल सामान्य विधि द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

यदि σ^2 का मान अज्ञात हो, तब इसको तात्त्विक आव्यूह (Orthogonal matrix) द्वारा परिकलित किया जा सकता है।

ज्ञात है,

$$e = Y - X\hat{\beta}$$

$$= (X\beta+u)-X[(X'X)^{-1}X'Y]$$
$$= (X\beta+u)-X[(X'X)^{-1}X'(X\beta+u)]$$
$$= X\beta+u-(X'X)^{-1}(X'X)X\beta-X\beta-X(X'X)^{-1}X'u$$
$$= u-(X'X)^{-1}X'u \qquad (9\ 20)$$
$$= \text{Au}, \quad \text{यहाँ } A=(I_n-X(X'X)^{-1}X']$$

जो एक सममित वर्गसम आव्यूह[1] (Symmetric Idempotent Martix) है अर्थात्

$A'=A$ तथा $A'A=A^2=A$ आदि

अतएव $e'e=(Au)'(Au)=u'A'Au=u'Au$

अथवा $e'e=u'[I_n-X(X'X)^{-1}X']u$ (9 21)

दोनों तरफ प्रत्याशित (expected) मान लेने पर,

$$E(e'e)=E[u'(I_n-X(X'X)^{-1}X')u]$$
$$=E(u'u)[I_n-X(X'X)^{-1}X']$$
$$=\sigma^2 t_r[I_n-X(X'X)^{-1}X']$$
$$+\sigma^2[t_rI_n-t_r\{X(X'X)^{-1}X'\}]$$
$$=\sigma^2[n-t_r\{(X'X)^{-1}(X'X)\}]$$
$$=(n-p)\sigma^2 \qquad (9\ 22)$$

यहाँ t_r= मुख्य विकर्ण के अवयवों का योग

चूँकि प्रसरण-सहप्रसरण आव्यूह पद मुख्य विकर्ण में दिये होते हैं, अत तत्समक आव्यूह (Identity Matrix) I_n के मुख्य विकर्ण के पदों का योग $t_rI_n=n$ होगा और इसके अतिरिक्त $(X'X)^{-1}$ $(X'X)$ आव्यूह के मुख्य विकर्ण के पदों का योग p के बराबर होगा, क्योंकि $(X'X)$ का क्रम (order) p है, ताकि
$(X'X)^{-1}(X'X)=I_p$ तथा इस प्रकार $t_rI_p=p$

(21) से

---

1 $A=I_n-X(X'X)^{-1}X'$
$=A'=I_n-X(X'X)^{-1}X'=A$
तथा $=A^2=[I_n-X(X'X)^{-1}X'][I_n-X(X'X)^{-1}X'$
$=I_n-2X(X'X)^{-1}X'+X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X'$
$=I_n-X(X'X)^{-1}X'$
$=A$

$$\frac{e'e}{\sigma^2} = n-p$$

अस्तु $\frac{e'e}{\sigma^2} = \frac{\Sigma e_i^2}{\sigma^2}$ का बटन काई-वर्ग बटन है, जिसकी स्वातन्त्र्य कोटि[1] $(n-p)$ हैं।

t बटन की परिभाषा के अनुसार,

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\Sigma e_i^2/(n-p)}\ \sqrt{\sigma_{ii}}}$$

का बटन एक t बटन है, जिसकी स्वातन्त्र्य कोटि $(n-p)$ है, यहाँ a_{ii}, आव्यूह $(X'X)^{-1}$ के विकर्ण का i वाँ पद है। β_i के सन्दर्भ में परिकल्पना का परीक्षण करने के लिये β_i का परिकल्पित मान रखते हैं, तथा यदि t का परिकलित मान उचित क्रान्तिक क्षेत्र (Critcal region) में आता तब H_o परिकल्पना को निरस्त कर देते हैं।

10

स्वसहसम्बन्ध तथा सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग निदर्श (Autocorrelation and Generalised Least Squares (GLS) Models)

पूर्व अध्याय में यह अध्ययन कर चुके है कि एकघाती समाश्रयण समीकरण,

$$Y = \beta X + u \qquad (10.1)$$

में त्रुटि पद u_i के सम्बन्ध में कुछ मान्यताएँ निर्धारित की जाती हैं, जिनमें से दो मुख्य निम्नांकित हैं

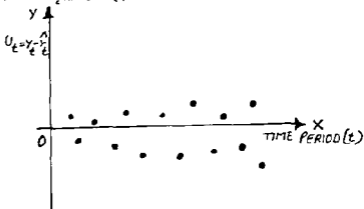
मान्यता (1) प्रत्येक त्रुटि पद u_i का प्रसरण σu^2 के बराबर है।

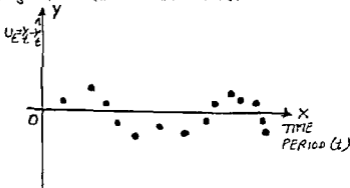
मान्यता (2) त्रुटि पद u_i के प्रतिदर्श मान स्वतन्त्र (रूप से बटित है, अर्थात् u_i युग्मानुसार असहसम्बन्धित हैं।

यदि त्रुटि पद मान्यता (1) का पालन नहीं करता है, तब उन पदों को **विषमप्रविचाली** *(Heteroscedastic) कहते हैं। यदि मान्यता (2) का पालन नहीं होता है तब त्रुटि पदों को* **स्वसहसम्बन्धित** *(Autocorrelated) अथवा* **क्रमिक सहसम्बन्धित** कहा जाता है। यदि इनमें किसी भी एक मान्यता की उपेक्षा की जाती है तब सरल न्यूनतम वर्ग आकलन विधि *(SLS)* तथा सार्थकता परीक्षण (जिनका अध्ययन पूर्व अध्याय में किया गया था) व्यापक रूप से विधि सगत नहीं रह पाते। अत जब इन मान्यताओं की उपेक्षा हो रही हो तब सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा दक्ष तथा अनभिनत आकलन नहीं मिल सकते, जिसके कारण हमें सशोधित तथा रूपान्तरित आकलन विधियों का प्रयोग करना आवशयक होता है।

स्वसहसम्बन्ध
(Auto Correlation)

जब त्रुटि पद अथवा काल श्रेणी के पद पारस्परिक रूप में स्वतत्र नहीं माने जा सकते, तब क्रमागत पदों के मध्य आश्रिता का परीक्षण। अनेक विधियों द्वारा किया जाता है, जिनमें एक महत्वपूर्ण विधि स्वसहसम्बन्ध है। त्रुटि पदों में स्वसहसम्बन्ध होने के विभिन्न कारण हो सकते हैं। उदाहरणार्थ, प्रत्याशित निदर्श तथा वितरित पश्चता विनिर्देशन (Distributed log

specifications) की स्थिति में, यद्यपि सैद्धान्तिक निदर्श में त्रुटियाँ पारस्परिक रूप में स्वतंत्र हो सकती हैं, तथापि आकलित समीकरण में स्वतन्त्र नहीं हो सकतीं। काल-श्रेणी समकों में किसी समय विशेष की त्रुटियाँ विगत समयावधि की त्रुटियों पर आश्रित हो सकती हैं। त्रुटि पदों में स्वसहसम्बन्ध है अथवा नहीं इसको किसी प्रकार ज्ञात किया जाये? इसकी एक विधि अवशेषों की प्रकृति का अध्ययन करना है। समाश्रयण रेखा द्वारा प्राप्त अवशेषों के प्रकीर्ण आरेख को देखकर इसकी उपस्थिति का अनुमान सरलतापूर्वक लगाया जा सकता है। यदि अवशेषों को किसी विशेष आकृति का अनुसरण करने पर त्रुटि पदों के मध्य स्वसहसम्बन्ध अथवा क्रमिक सहसम्बन्ध न होने की सम्भावना है। उदाहरणार्थ रेखा चित्र 10 1 में समाश्रयण रेखा द्वारा अवशेषों की आकृति चक्रीय है।

रेखाचित्र 10 1– अवशेषों की चक्रीय आकृति

रेखाचित्र 10 2 में अवशेषों की आकृति दोलायमान (Oscillating) हैं, जहाँ कि धनात्मक के पश्चात् ऋणात्मक तथा ऋणात्मक के पश्चात धनात्मक अवशेष आते हैं। इन दोनों स्थितियों में त्रुटि पदों में स्वसहसम्बन्ध का आभास मिलता है।

रेखाचित्र 10 2– दोलायमान अवशेष

स्वसहसम्बन्ध का द्वितीय कारण कुछ चरों का विलोप करना भी हो सकता है। तृतीय कारण समाश्रयण समीकरण का उचित निर्विशिष्टीकरण नहीं होना भी हो सकता है, उदाहरणार्थ, हम दो चरों के मध्य सम्बन्ध को एक घातीय मान लें, परन्तु वास्तव में वे सम्बन्ध एक घातीय न होकर द्विघातीय (Quadratic) हो। मापन की त्रुटियों के परिणामस्वरूप भी स्वसहसम्बन्ध हो सकता हैं।

किसी श्रेणी के पदों का उसी श्रेणी के निश्चित समय अन्तराल के पूर्व-पदों के मध्य का सहसम्बन्ध इस पश्चता (Log) अथवा समयान्तराल (Period) का स्वसहसम्बन्ध कहा जाता है। उदाहरणार्थ, श्रेणी $u_1, u_2, \ldots u_{t-1}, u_t, \ldots u_n$ में u_t तथा u_{t-1} का सहसम्बन्ध t पश्चता स्वसहसम्बन्ध ρ_t कहलायेगा। यहाँ $t=t+1, t+2, \ldots n$ तथा $t < n$। अतएव स्पष्ट है कि t पश्चता का स्वसहसम्बन्ध परिकलित करने में केवल $(n-t)$ प्रेक्षण ही प्रयुक्त किये जाते हैं।

यदि त्रुटि पद u_t त्रुटि पद u_{t-1} से निम्न एक घातीय समीकरण के रूप में सम्बन्धित हो तब यह सम्बन्ध 'प्रथम क्रम का रैखिक स्वसहसम्बन्ध' कहा जाता है

$$u_t = \rho u_{t-1} + e_t \quad t=2, \ldots n \tag{10.2}$$

यहाँ ρ एक स्थिरांक है, जिसको स्वसहसम्बन्ध गुणांक कहा जाता है। e_t त्रुटि पद है। समीकरण (10.2) को 'प्रथम क्रम स्वसमाश्रयण पद्धति' (First order regressive or Markov sceneme) कहा जाता है। गुणांक ρ धनात्मक अथवा ऋणात्मक कुछ भी हो सकता है। यदि ρ ऋणात्मक है तब त्रुटियाँ u_t धनात्मक तथा ऋणात्मक मानों के मध्य दोलन करती हैं तथा उन्हें 'ऋणात्मक प्रथम क्रम का स्वसहसम्बन्ध' है यदि ρ धनात्मक है तब त्रुटियों का सम्बन्ध 'धनात्मक प्रथम क्रम का सहसम्बन्ध' कहा जाता है। यदि ρ का निरपेक्ष मान एक से अधिक है, तब त्रुटि में समय के साथ-साथ वृद्धि होती रहेगी। इस प्रकार के स्वसहसम्बन्ध वाली आर्थिक श्रेणी स्वाभाविक रूप से अस्थिर होगी।

मान लो समीकरण (10.2) में ρ का मान ज्ञात है (यद्यपि आगामी पृष्ठों में हम ρ का आकलन करेंगे) तथा त्रुटि पद e_t निम्न आधारभूत मान्यताओं का पालन करती है

$$\left.\begin{aligned} E(e_t) &= 0 \\ E(e_t e_{t+s}) &= \sigma^2 \text{ यदि } S=0 \\ &= 0 \text{ यदि } S \neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

स्वसहसम्बन्ध का प्रभाव (Effect of Auto-Correlation)

मान लो,

$$Y_t = \beta X_t + u_t$$

एक समाश्रयण निदर्श है, यहा u_t प्रथम क्रम की स्वसमाश्रयण पद्धति का पालन करता है। अर्थात्

$$U_t = \rho u_{t-1} + e_t$$

यहा $(\rho) < 1$ अथवा $-1 < \rho < 1$ (10 4)

$$\left.\begin{array}{l} E(e_t) = 0 \\ E(e_t^2) = \sigma_t^2 \\ E(e_t e_r) = 0 \quad t \neq r \end{array}\right\} t=1,2,$$

चूँकि

$$u_t = \rho u_{t-1} + e_t \quad (i)$$

$$u_{t-1} = \rho u_{t-2} + e_{t-1} \quad (ii)$$

समीकरण (1) में u_{t-1} का मान रखने पर,

$$u_t - \rho(\rho u_{t-2} + e_{t-1}) + e_t$$
$$= \rho^2 u_{t-2} + \rho e_{t-1} + e_t$$
$$= \rho^2 (\rho u_{t-3} + e_{t-2}) + \rho (\rho u_{t-2} + e_{t-1}) + e_t$$
$$= \rho^3 u_{t-3} + \rho^2 e_{t-2} + \rho e_{t-1} + e_t$$

अथवा

$$u_t = e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + \quad (10\ 5)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} p^r e_t = 2,$$

$$E(u_t) = E(e_t) + \rho\,(e_{t-1}) + \rho E\,(e_2) +$$

$$= 0 \qquad (\quad E\,(e_t) = 0 \quad (10\ 6)$$

जिसका अर्थ यह हुआ कि प्रकल्पना $E(u_t)=0$ स्वसहसम्बन्ध की स्थिति में भी अपरिवर्तित रहती है।

समीकरण (10 4) में दोनों ओर का वर्ग लेने पर,

$$u_t^2 = e^2_t + \rho^2 e^2_{t-1} + \rho^4 e^2_{t-2} + \quad + 2\rho e_t e_{t-1} +$$

दोनों ओर प्रत्याशित मान लेने पर,

$$E(u^2_t) = E(e^2_t) + \rho^2 E(e^2_{t-1}) + \rho^4 E(e^2_{t-1}) +$$

(वज्र गुणा पदों के प्रत्याशित मान शून्य हैं, मान्यता के अनुसार,)

$$= \sigma^2 e + \rho^2 \sigma^2 e + \rho^4 \sigma^2 e + \qquad [\ E(e^2_t = \sigma^2_u)$$
$$= \sigma^2 e(1 + \rho^2 + \rho^4 +$$

अथवा $$\sigma^2_u = \frac{\sigma^2 e}{1-\varrho^2} \qquad (10\ 7)$$

(10 6) से यदि σ^2_e स्थिर है तब σ^2_u भी स्थिर है, अर्थात् समविचालिता (Homscedasticity) की मान्यता का भी पालन होता है।

अब, $E(u_t u_{t-1}) = Cov(n_t u_{t-1}) = u_t$ तथा u_{t-1} का सह प्रसरण

$= E[(e_t + \varrho e_{t-1} + \varrho^2_{t-2} + 1)(e_{t-1} + \varrho e_{t-2} + \varrho^2 e_{t-3} + 1)]$

$= E[\{(e_t + \varrho)e_{t-1} + \varrho e_{t-2} + 1)\}(e_{t-1} + \varrho e_{t-2} + \varrho^2 e_{t-3} + 1)]$

$= E[e_t(e_{t-1} + \varrho e_{t-2} + \varrho^2 e_{t-3} + 1)]$

$+ \varrho E(e_{t-1} + \varrho e_{t-2} + 1)^2$

$= O + \varrho E(e_{t-1} + \varrho e_{t-2} + 1)$ (मान्यतानुसार)

$\varrho E(e^2_{t-1} + \varrho^2 e^2_{t-2} + \varrho^4 e^2_{t-2} \quad)$ +शून्य मान वाले पद

$\varrho(\sigma^2 e + \varrho^2 \sigma^2 e + \varrho^4 \sigma^2 e + \quad)$

$= \frac{\varrho \sigma^2 e}{1-\varrho^2} \varrho \sigma^2_u$ (समीकरण 10 6 से)

इसी प्रकार $E(u_t u_{t-2}) = \varrho^2 \sigma^2_u$

तथा सामान्यत, $E(u_t u_{t-t}) = \varrho^t \sigma^2_u \qquad t \neq 0$

अथवा $$\varrho^t = \frac{E(u_t u_{t-t})}{\sigma^2_u} = \frac{Cov\,(u_t u_{t-t})}{Var\,(u)} \qquad (10\ 8)$$

यदि $t = 0$ तो $\varrho^0 = 1$

अर्थात् शून्य पश्चता का स्वसहसम्बन्ध सदैव एक होता है तथा यादृच्छिक श्रेणी के लिये उच्च क्रम का प्रत्येक गुणाक शून्य होगा।

समीकरण (10 7) u- श्रेणी के मध्य, t पश्चता का स्वसहसम्बन्ध गुणाक परिभाषित करता है। अर्थात् $\varrho_t = \varrho^t$

जबकि $\varrho, t = 1$ पश्चता का स्वसहसम्बन्ध है।

सरल न्यूनतम वर्ग आकलक β के गुणों पर स्वसहसम्बन्ध का प्रभाव (Properties of Simple Least-Squares Estimator β in the Presence of Auto Correlation)

यदि हम स्वसहसम्बन्ध के विद्यमान रहते हुए सरल न्यूनतम वर्ग विधि *(SLS)* का प्रयोग करते हैं तब निम्नाकित तीन मुख्य परिणाम (Consequences) हो सकते हैं

(1) यदि त्रुटि पदों में क्रमिक सहसम्बन्ध हो तब साधारण न्यूनतम वर्ग आकलक β अनभिनत हो सकता है, परन्तु इसका प्रसरण न्यूनतम नहीं होगा। क्योंकि ग्रॉस-मार्कोव (Grauss-Markov) प्रमेय के अनुसार सरल न्यूनतम वर्ग आकलक उस अवस्था में ही न्यूनतम प्रसरणयुक्त अनभिनत आकलक हो सकते हैं, जबकि त्रुटि पद पारम्परिक रूप से स्वतन्त्र तथा प्रत्येक प्रेक्षण के लिये उनका प्रसरण समान हो। उदाहरणार्थ,

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

यहाँ u_t की स्वसमाश्रयणता का अध्ययन करेंगे। β के सरल न्यूनतम वर्ग आकलक β को निम्न प्रकार प्रस्तुत किया जा सकता है।

$$\beta \frac{\Sigma(X_i - X)(Y_i - Y)}{\Sigma(X_i - X)^2}$$

अथवा (सरलता हेतु)

$$\beta = \frac{\Sigma x_i Y_i}{\Sigma x_i^2}, \quad \text{यहा } x_i = x_i - X$$

$$Y_i = Y_i - Y$$

$$= \frac{\Sigma x_i(\beta x_i + u_i}{\Sigma x_i^2}$$

$$= \frac{\beta \Sigma x_i^2}{\Sigma x_i^2} + \frac{\Sigma x_i u_i}{\Sigma x_i^2}$$

अथवा $$\beta = \beta + \frac{\Sigma x_i u_i}{\Sigma x_i^2} \qquad (1)$$

अत $E(\beta) = \beta$ (यदि $E(u_i) = 0$

अब यदि β को अनभिनत आकलक मान लिया जाये तब इसका प्रसरण निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है।

$$Var(\beta) = E(\beta - \beta)^2$$

$$= E \frac{\Sigma x_i u_i}{\Sigma x_i^2} {}^2 \qquad [(1) \text{ से}]$$

$$= \frac{1}{(\Sigma x_i^2)^2} E(\Sigma x_i u_i)^2$$

$$= \frac{1}{(\sum x_t^2)^2} E(\sum x_t^2 u_t^2 + 2\sum x_t u_t x_{t-1} u_{t-1} + 2\sum x_t u_t x_{t-2} u_{t-2} + \quad)$$

$$= \frac{1}{(\sum x_t^2)^2} (\sigma^2_u \sum x_t^2 + 2p\sigma^2_u \sum x_t x_{t-1} + 2p^2\sigma^2_u \sum x_t x_{t-2} + \quad)$$

$$= \frac{\sigma^2_u}{\sum x_t^2} + \frac{2\sigma^2_u}{\sum x_t^2} (p\frac{\sum x_t x_{t-1}}{\sum x_t^2} + p^2 \frac{\sum x_t x_{t-2}}{\sum x_t^2} + \quad)$$

इस प्रकार हम देखते है कि स्वसहसम्बन्ध की स्थिति में Var (β), पूर्व मान से भिन्न है। अत हम कह सकते हैं कि स्वसहसम्बन्ध की स्थिति में सरल न्यूनतम वर्ग आकलक 'दक्ष आकलक' नहीं है।

(2) Var (β) के मान में परिवर्तन के परिणामस्वरूप एक घातीय समाश्रयण निदर्श हेतु t- परीक्षण आदि के सूत्र विधि सगत नहीं रह पाते।

(3) इन सरल न्यूनतम वर्ग *(SLS)* के सूत्रों द्वारा किये गये पूर्वानुमान (Prediction) भी दक्ष नहीं होंगे।

β के सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग (GLS) आकलक
(Generalised Least Squares (GLS) Estimators of β)

सन् 1934 में ऐटकिन (Aitken) ने विषम प्रविचालिता अथवा स्वसम्बन्धित त्रुटियों के विद्यमान रहने की स्थिति में सामन्यीकृत न्यूनतम वर्ग विधि का प्रतिपादन किया तथा बासमैन (Basmann) ने सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग आकलकों के *उपगामी बटनों (Asymptotic distributions) के गुणों का व्युत्पादन किया।*

स्वसहसम्बन्ध की स्थिति में प्राचलों के आकलन की न्यूनतम वर्ग विधि को सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग विधि *(GLS)* तथा इसके द्वारा प्राप्त आकलकों को प्राय *'ऐटकिन आकलक'* (Aitken Estimators) *कहा जाता है। सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग अनेक स्वतत्र चरों की स्थिति में भी किया जा सकता है।* अत हम यहाँ सामान्य स्थिति पर ही आव्यूह के रूप में विचार करते हैं।

माना लो समाश्रयण निदर्श,

$Y = X\beta + U$ (10 9)

है। यहाँ

$$Y = \begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \\ Y_n \end{matrix} \quad X = \begin{matrix} X_{11} & X_{21} & X_{p1} \\ X_{12} & X_{22} & X_{p2} \\ \\ X_{1n} & X_{2n} & X_{pn} \end{matrix}$$

$$, \beta = \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \\ \beta_n \end{matrix} \quad , U = \begin{matrix} U_1 \\ U_1 \\ \\ U_n \end{matrix}$$

यहाँ मान्यतानुसार,

$$\left.\begin{matrix} E(U)=0 \\ \text{तथा} \quad E(UU')=V \end{matrix}\right\} \qquad (10\ 10)$$

यहाँ V विक्षोभ पद की प्रसरण-सहप्रसरण आव्यूह है। V एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है। यदि विक्षोभ पद (u) प्रथम क्रम के स्वसहसम्बन्ध का पालन करता हो तब प्रसरण-सहप्रसरण आव्यूह V को निम्नांकित रूप में व्यक्त किया जा सकता है

$$V = \sigma_u^2 \begin{matrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^{n-2} \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & 1 \end{matrix}$$

यहाँ ρ स्वसहसम्बन्ध गुणांक है। अर्थात् विक्षोभ पद U_t निम्नांकित सम्बन्ध का अनुसरण करता है

$$U_t = \rho U_{t-1} + e_t \qquad (10\ 11)$$

यहाँ e_t त्रुटि पद है जो न तो विषम प्रसिचाली है और न ही स्वसहसम्बन्धित है इसके द्वारा $E(U_1^2)=\sigma_u^2$, $E(U_2^2)=\sigma_u^2$ आदि प्राप्त होता है तथा $E(U_t\ U_{t-1})=\rho^i\ \sigma_u^2$, प्रसरण आव्यूह (Variance-Covariance Matrix) मुख्य विकर्ण के पद प्रसरण हैं और अन्य समस्त पद सहप्रसरण को व्यक्त करते हैं।

सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग विधि में विक्षोभ पद U_t को स्वसहसम्बन्ध ρ तथा त्रुटि पद e_t (जो कि पारस्परिक रूप में स्वतंत्र हैं) से रूपान्तरित कर लिया जाता है। उदाहरणार्थ,

$$Y = \beta X + (\rho U_{t-1} + e_t)$$

तथा पुन: नवीन निदर्श पर साधारण न्यूनतमवर्ग विधि *(SLS)* को प्रयुक्त करके β के सर्वश्रेष्ठ रेखीय अनभिनत आकलक (BLUE) β ज्ञात किये जाते हैं। अर्थात् निदर्श के विक्षोभ

पद (जो कि स्व-सम्बन्धित है) नवीन त्रुटि पद (जो कि स्वसहसम्बन्धित नहीं है) द्वारा स्थानांतरित कर दिये जाते हैं। इस विधि द्वारा प्राप्त आकलकों को सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग आकलक कहते हैं तथा β^* से निरूपित करते है। समीकरण (10 8) द्वारा प्रदत्त β^* में निम्नांकित तीन गुण होने चाहिये

(i) β^* रेखीय आकलक है।
(ii) β^* एक अनभिनत आकलक है।
(iii) β^* एक सर्वश्रेष्ठ आकलक है।

अब निम्नांकित रूपान्तरण पर विचार कीजिये

$$\beta^* = AY \tag{10 12}$$

यहाँ $A, P \times n$ क्रम का आव्यूह है तथा β का एकघातीय आकलक है जो कि Y के मानों में एकघातीय है। अब हम उपर्युक्त गुणों को सिद्ध करते हैं।

(i) β^*, β का एकघातीय आकलक है

ज्ञात है, $\beta^* = AY$

$= A(x\beta+u)$

$= AX\beta + AU$

अत β^*, प्राचल β तथा विक्षोभ पद U का एकघातीय फलन है।

(ii) β ,β का अनभिनत आकलक है

प्राप्त है, $\beta^* = A\times\beta+AU$ (10 13)

$E(\beta^*) = AX\beta$ ($E(U)=0$, मान लिया गया है)

$=\beta$ (यदि और केवल यदि $AX=I$)

इस प्रकार β^*,β का अनभिनत आकलक है।

(iii) β , β का सर्वश्रेष्ठ आकलक है।

β^* को सर्वश्रेष्ठ आकलक तब माना जाता है जबकि उसका प्रसरण अन्य आकलकों की तुलना में न्यूनतम हो। β^* का प्रसरण-सहप्रसरण आव्यूह निम्न प्रकार है

$V(\beta^*) = E(\beta^*-\beta)(\beta^*-\beta)']$

परन्तु $\beta^* = AY = A(X\beta+U)$

$= AX\beta+AU$

$= \beta+AU$ (यहाँ $AX=I$, मान लिया गया)

अथवा $\beta^*-\beta = AU$

अस्तु,

$$V(\beta^{*}) = E[(AU)(AU)(AU)']$$
$$= E(AU\,U'A')$$
$$= E(U'A'\,AU) \quad (\text{ समित आव्यूह}) \qquad (10\ 14)$$

$A, P \times n$ क्रम का आव्यूह है, $A\,A, n{\times}n$ क्रम का सममित आव्यूह है। मानलो, $A = (w_{ij})\ i,j=1,2, \quad ,n$

इस प्रकार, $U\,A'AU$

$$= [u_1, u_2, \quad u_n] \begin{matrix} w_{11}\ w_{12} & w_{1n} \\ w_{21}\ w_{22} & w_{2n} \\ \\ w_{n1}\ w_{n2} & w_{nn} \end{matrix} \quad \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_n \end{matrix}$$

$$= w_{11}u_1^2 + w_{22}u_2^2 + \quad + w_{nn}u_n^2$$
$$+2w_{12}u_1u_2 + \quad +2w_{1n}n_1u_n +$$
$$+2w_{n\ 1}w_nu_{n\ 1}u_n$$

तथा

$$A'AUU' = \begin{matrix} w_{11}\ w_{12} & w_{1n} \\ \\ w_{n1}\ w_{n2} & w_{nn} \end{matrix} \quad \begin{matrix} u_1^2\ u_1u_2 & u_1u_n \\ u_2u_1u_2^2 & u_2u_n \\ u_nu_1\ u_nu_2 & n_n^2 \end{matrix}$$

अत $\quad tr(A'AUU') = w_{11}u_1^2 + w_{22}u_2^2 + \quad + w_{nn}u_n^2 +$
$$+2w_{12}u_1u_2 + \quad +2w_{1n}u_1u_n +$$
$$+2w_{n\ 1}w_nu_{n\ 1}u_n$$

$$= U'A'\,AU$$

अत $\quad E(u'A'\,AU) = E\,t_r\,(A'\,AUU')$
$$= t_r[A'\,AE(UU')]$$
$$= t_r(A'\,AV) \quad \text{यहाँ } E(UU') = V \text{ मान्यतानुसार}$$

इस प्रकार समीकरण (10 14) का रूप निम्नांकित हो जाता है।

$$E[(\beta^{*}-\beta)(\beta^{*}-\beta)'] = E(U'A'\,AU) = t_r(A'\,AV) \qquad (10\ 15)$$

अत $v(\beta^*)$ के न्यूनतम होने की अनिवार्य तथा आवश्यक शर्त यह हुई कि $t_r(A'AV)$ न्यूनतम होना चाहिये। अत अनभिनत आकलक A ज्ञात किया जा सकता है, जिससे कि $t_r(A'AV)$ न्यूनतम हो।

हम A का चयन इस प्रकार करते है कि प्रतिबन्ध $AX=I$ के सापेक्ष $t_r(A'AV)$ न्यूनतम हो। यहाँ लैगरैज गुणक λ_{ij} $(i,j=1,2, \ldots, p)$ का प्रयोग किया जाता है। अस्तु

$$Z = t_r[A'AV]-t_r[L'(AX-I)] \tag{10 16}$$

$$\text{यहाँ} \quad L= \begin{matrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{1p} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{2p} \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \lambda_{pp} \end{matrix}$$

(16) को A के अवयवों के सापेक्ष आशिक अवकलन करके अवकलजों को शून्य के बराबर रखने पर हमे निम्नाकित आव्यूह समीकरण प्राप्त होता है।[1]

$$\frac{\partial Z}{\partial A} = 2AV-LX'=0$$

अथवा $$2AV = LX' \tag{10 17}$$

(14 17) को $V^{-1}X$ से उत्तर-गुणन करने पर

$$2AVV^{-1}X=LX\,V^{-1}X$$

$$2AXI=L(X'V^{-1}X \qquad [\quad VV^{-1}=I]$$

अथवा $$2I=L(X'V^{-1}X) \qquad [\quad AX=I \text{ प्रकल्पना द्वारा}]$$

$$L=2(X'V^{-1}X)^{-1} \tag{10 18}$$

(10 18) से L का मान (10 17) में रखने पर

$$2AV=2(X'V^{-1}X)^{-1}X'$$

अथवा $$A=(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1} \tag{10 19}$$

A का मान रूपान्तरण (10 12) में रखने पर

$$\begin{aligned} \beta^* &= AY \\ &= (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y \\ &= X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\,(X\beta+U) \\ &= \beta+(X'V^{-1}X)^{-1}X'V\text{-}1U \end{aligned}$$

अथवा $$\beta^*-\beta = (X'V^{-1}X)^{-1}X\,V^{-1}U$$

1 Please see the proof of this result in J Johnston Econometic Methods

तथा प्रसरण-सहप्रसरण आव्यूह

$V(\beta^{\cdot}) = E[(\beta^{\cdot}-\beta)(\beta^{\cdot}-\beta)]$

$= E[\{X'V^{-1}X\}^{-1}X'V^{-1}U\}^{4}\{X'V^{-1}X\}^{-1}X'V^{-1}U\}^{1}]$

$= (X'V^{-1}X)^{-1}XV^{-1})E(UU')$

$\{X'V^{-1}X\}^{-1}X'V^{-1}X\}^{-1}X'V^{-1}\}'$

$= E(X'V^{-1}X)^{-1}XV^{-1}V(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\}'$

$= (X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}X)(X'V^{-1}X)^{-1}$

अथवा $V(\beta^{\cdot}) = (X'V^{-1}X)^{-1}$ (10 20)

यह सिद्ध करने के लिये किसी अन्य आकलक के सापेक्ष $V(B^{\cdot})$ [समीकरण (10 21)] न्यूनतम है, एक नवीन एकघातीय अनभिनत आकलक b निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं।

$b=(A+\beta)Y$

यहाँ $A=(X'V^{\cdot 1}X)^{-1}V^{-1}$ तथा β, pxn क्रम का एक आव्यूह है, जो कि शून्य आव्यूह नहीं है। यदि b अनभिनत है, तब

$E(b) -E[((X'V^{1}X)X\,V^{1}+\beta)(X\beta+U)]$

$=\beta+\beta x\beta$

$=\beta$ (यदि और केवल यदि $\beta X=0$ यहाँ 0, pxp क्रम का शून्य आव्यूह है)

अब, $V(b)=E[(b-\beta)'(b-\beta)]$

ज्ञात है, $b=(A+B)Y$

$=(A+B)(X\beta+U)$

$=Ax\beta+\beta+AU+BU$

$=Ax\beta X\beta+\beta+AU+BU$

$=\beta+(A+B)U$ ($AX=I, BX=0$

अथवा $b-\beta=(A+B)U$

अस्तु $V(b)=E[U(A+B)'[A+B)U]$

$=(A+B)E(UU')(A+B)$

$=(A+B')V(A+B)$

$=[AVA'+AVB'+BVA']+BVB'$

$=(X'V^{1}X)+BVB'$ ($A=(X'V^{1})X'V^{1}$

$AX=I, BX=0$

$BVA'=0$ तथा

$AVB'=0)$

अथवा $V(b)=V(\beta^*)+BVB$ यहाँ BVB' एक धनात्मक राशि है तथा $V(\beta^*)=(X'V^{-1})$

अतएव $V(\beta^*)< V(b)$

अर्थात् , $V(B_i)< V(b_i), I=1,2, \quad p$

इस प्रकार यह सिद्ध हुआ कि β^* (GLS आकलक) BLUE है।

सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग विधि की उपलक्षणाएँ (Implications of GLS)

सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग विधि का मुख्य उपयोग स्वसहसम्बन्धित विक्षोभ की स्थिति में सरल न्यूनतम वर्ग आकलक ज्ञात करने हेतु किया जा सकता है, निम्नांकित निदर्श पर विचार कीजिये,

$$Y_t=X\beta+U_t$$

यहाँ $U_t=pU_{t-1}+e_t \qquad |p|<1$

(10 6) तथा (10 7) द्वारा प्राप्त होता है,

$$E(uu')=V=\frac{\sigma_e^2}{1-p^2}\begin{matrix} 1 & p & p^2 & & p^{n-1} \\ p & 1 & p & & p^{n-2} \\ \\ p^{n-1} & p^{n-2} & p^{n-3} & & 1 \end{matrix} \qquad (10\ 21)$$

$$\text{तथा } V^{-1}=\frac{1}{\sigma_e^2}\begin{matrix} 1 & -p & 0 & & 0\ 0 \\ -p & 1+p^2 & -p & & 0\ 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & & -p\ 1 \end{matrix} \qquad (10\ 22)$$

इस प्रकार हम देखेंगे कि सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग आकलक को दो चरणों में लागू किया जा सकता है

(i) मूल चरों को विक्षोभ पदों की स्वसमाश्रयण सरचना के अनुसार रूपान्तरित करना, तथा

(ii) इन परिवर्तित चरों के लिये सरल न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग करना,

समाश्रयण निदर्श $Y=X\beta+U$ पर रूपान्तरण आव्यूह T लेने पर प्राप्त होता है

$$TY=TXB+TU \qquad (10\ 23)$$

(10 22) में βका SLSआकलक

$$\beta_{sls}=[TX)'(TX)]^{-1}(TX)'(TY)$$
$$=(X'T'TX)^{-1}X'T\,TY \qquad (10\,24)$$

GLS आकलक

$$\hat{\beta}=(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$$

की तुलना (10 24) से करने पर हमें ज्ञात होता है कि दोनों आकलक समतुल्य है, यदि

$$T'T=V^{-1} \qquad (10\,25)$$

स्वसहसम्बन्ध-परीक्षण
(Test of Auto correlation)

स्वसहसम्बन्ध न्यूनतम वर्ग आकलकों को असगत बना देता है, क्योंकि इस स्थिति में न्यूनतम वर्ग आकलक वाछित गुणों से युक्त नहीं रह पाते। अतएव यदि हमें स्वसहसम्बन्ध की उपस्थिति का ज्ञान हो जाए तब सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा अधिक दक्षतायुक्त आकलक प्राप्त किये जा सकते है, क्योंकि

$$V(\hat{\beta}\,GLL) < V(\beta SLL)$$

कुछ परिस्थितियों में, न्यूनतम वर्ग अवशेषों द्वारा क्रमिक स्वसहसम्बन्ध प्राचलों के आकलन साधारण न्यूनतम वर्ग आकलकों से भी दक्ष दक्षतायुक्त हो सकते हैं। अत यह आवश्यक हो जाता है कि स्वसहसम्बन्ध का परीक्षण कर लिया जाये

यह ज्ञात करने हेतु कि त्रुटि पदों के मध्य स्वसहसम्बन्ध विद्यमान है अथवा नहीं, डर्बिन-वैटसन d परीक्षण का प्रयोग किया जाता है।

डर्बिन-वैटन d प्रतिदर्शज (Durbin-Watson d Statistic)[1]

निम्नाकित समाश्रयण समीकरण का अध्ययन कीजिये,

$$Y_t=\beta_1X_{1t}+\quad\beta^pX_{pt}+e_t \qquad (10\,26)$$

$$t=1,2,\quad ,n$$

यहाँ $\beta_i s$ प्राचल $\beta's$ के न्यूनतम वर्ग आकलक हैं, तथा $e's$ अवशेष है। अब शेषों के आधार पर डर्बिन-वैटसन d प्रतिदर्शज को निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है,

---

1 (i) J Durbin and G.S Watson 'Testing for Serial Correlation in least Squares Regression,' **Biometrica** Part I and II, 1950 and 1951
(ii) J Durbin "Testing for Serial Correlation in Least-Squares Regression When Some of the Regressions are Lagged Dependent Variables" **Econometrica**, 38, No 3 (May 1970), pp 410-21

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \qquad (10.27)$$

जहाँ n प्रतिदर्श का आकार है।

जब त्रुटि पद स्वतंत्र होते हैं तब d प्रतिदर्शज के सैद्धान्तिक बटन का माध्य 2 होता है, परन्तु प्रतिदर्शी उच्चावचनों (Sampling fluctuations) के कारण विभिन्न प्रतिदर्शों से परिकलित d के मान त्रुटि पदों के स्वतन्त्र होते हुये भी पृथक्-पृथक् हो सकते है। d प्रतिदर्शज हेतु उचित सार्थकता स्तर प्राप्त नहीं किये जा सके हैं, परन्तु डर्बिन तथा वैटसन ने 95% विश्वास्यता स्तर पर d के क्रान्तिक मानों (Critical values) की सारणी का परिकलन किया है जो कि वैकल्पिक परिकल्पना (Alternative hypothesis) H_1 'त्रुटि पद क्रमिक रूप से स्वतंत्र नहीं है' के प्रति निराकरणीय परिकल्पना (Null hypothesis), H_o, 'त्रुटि पद क्रमिक रूप से स्वतन्त्र है' के परीक्षण के लिये उपयुक्त है। अर्थात

$$H_o \quad p = 0$$

तथा $H_1 \quad p \neq 0$ या $p > 0$ या $p < 0$

परिकलित d के मान की तुलना सारणी से लिये गये मान द्वारा की जाती है। सारणी में n तथा $K[=X$ चरों की संख्या जिन्हें व्याख्यात्मक चर (Explonatory variables) कहते हैं] के विभिन्न मानों के लिये d के निम्न तथा उच्च सीमा dL तथा dU के मान प्रदत्त होते हैं। इसके द्वारा निम्न प्रकार निष्कर्ष प्राप्त किए जाते हैं मान लो,

$$H_o \quad p = 0$$

$$H_1 \quad p > 0$$

(अ) H_o को निरस्त कीजिये यदि $d < dL$

(ब) H_o को निरस्त न कीजिये यदि $d > du$

(स) यदि $dL > d - dU$, तो परिणाम अनिर्णायक है।[1]

यदि d का परिकलित मान से अधिक है तब इसको वैकल्पिक परिकल्पना $p < 0$ के परीक्षण कीजिये। यहाँ निष्कर्ष निम्न प्रकार लिये जा सकते है

(अ) H_o को निरस्त कीजिये यदि $d < 4 - dL$

(ब) H_o को निरस्त न कीजिये यदि $d < 4 - du$

(स) यदि $4 - dU < d < 4 - dL$ तब परिणाम अनिर्णायक हैं।

1 An Alternative test of the d statistic has recently been obtained by H Theil and A.L Nagar, "Testing the independence of Regression Disturbances *Journal of American Statistical Association*, Vol. 56, pp 793-806, 1961

11

एकल समीकरण समस्याएँ
(Single Equation Problems)

एकल समीकरण निदर्श के प्राचलों के आकलन में निम्नांकित समस्याओं का उत्पन्न होना सम्भावित है।

(1) स्वसहसम्बन्ध की समस्या (Problem of Auto Correlation)
(2) विषम विचालिता की समस्या (Problem of Heteroscedasticity)
(3) बहु संरेखता की समस्या (Problem of Multi collinearity)

स्वसहसम्बन्ध की समस्या का अध्ययन हम अध्याय 10 में कर चुके है। इस अध्याय में हम शेष समस्याओं का अध्ययन करेंगे।

विषम विचालिता (Heteroscedasticity)

साधारण न्यूनतम वर्ग *(OLS)* विधि के अन्तर्गत यह मान्यता है कि त्रुटि पद u_i शून्य माध्य तथा समान प्रसरण σ_u^2 सहित स्वतन्त्र रूप से बंटित हैं। प्रकल्पना "त्रुटि पदों का प्रसरण समान है अर्थात् $E(UU') = \sigma^2 I_n'$ को समविचालिता की मान्यता (Assumption of homoscedasticity) कहा जाता है।" इस मान्यता का उल्लघन होने पर त्रुटियाँ विषम विचाली (heterscedastic) कही जाती हैं। विषम विचालिता की स्थिति में साधारण न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा सर्वोत्तम रेखीय अनभिनत आकलक *(BLUE)* प्राप्त नहीं किये जा सकते हैं। त्रुटियों के स्वतन्त्र होते हुए भी उनके प्रसरण असमान हो सकते हैं।

विषम विचालिता की समस्या उस स्थिति में उत्पन्न होती है जब प्रसरण में परिवर्तन चरों के आधार पर होता है। उदाहरणार्थ, हम निम्न प्रकार के उपभोक्ता फलन

$$C_i = a + bY_i + e_i$$

का आकलन करते हैं, यहाँ C_i = उपभोग तथा Y_i = आय।

जब उपभोग तथा आय अधिक मात्रा में है, तब उपभोग मापन में त्रुटियों का निरपेक्ष मान अधिक है। इसके विपरीत निरपेक्ष मान कम है जबकि उपभोग तथा आय कम है।

सामान्यत त्रुटियाँ विषम विचाली होंगी यदि आर्थिक इकाइयों का आकार विस्तृत परिसर में परिवर्तित होता है, विषम विचालिता काल श्रेणी आँकड़ों की अपेक्षा अनुप्रस्थ आँकड़ों में अधिक पाई जाती है।[1]

उदाहरणार्थ, परिवारों के बजट के सर्वेक्षण द्वारा विभिन्न वस्तुओं की व्यय की लोच के मापने में छोटे, कम आय वाले परिवारों की अपेक्षा बडे अधिक आय वाले परिवारों के व्यय में कम त्रुटिया पाई जाती है। जितना अधिक उपभोग तथा आय होगी उतनी ही अधिक विषम विचालिता की सम्भावना पाई जाती है।

विषम विचालिता का प्रभाव (Effect of Heteroscedasticity)

विक्षोभ पदों के प्रसरण में असमानता के परिणाम स्वरूप समाश्रयण गुणाक की विशेषताएँ निम्नांकित रूप में प्रभावित होती है

न्यूनतम वर्ग आकलक दक्ष नहीं होते तथा सार्थकता परीक्षण एव विश्वास्यता सीमाएँ लागू नहीं होतीं। अतएव परिकल्पना परीक्षा से पूर्व विक्षोभ पदों की विषमविचालिता की खोज करना आवश्यक है।

विक्षोभ पदों में विषम विचालिता की खाज हेतु विधियाँ
(Methods to Betect the Presence of Heteroscedasticity in the Disturbance Terms)

विषम विचालिता की स्थिति में आकलन करने से पूर्व यह ज्ञात करना आवश्यक हो जाता है कि विक्षोभ पदों में विषम विचालिता विद्यमान है अथवा नहीं। विषम विचालिता को ज्ञात करने की निम्नलिखित विधियाँ प्रचलित हैं

(1) **ग्राफ द्वारा–** आश्रित चर को X–अक्ष पर तथा अवशेषों को Y–अक्ष पर अंकित करते है तथा सगत बिन्दुओं की आकृति का निरीक्षण करते है। यदि बिन्दु किसी समाश्रयण रेखा के सगत फैले हुए दिखाई दें तो समविचालिता की स्थिति है। यदि बिन्दु अधिक बिखरे हुए हों तो विषम विचालिता की सम्भावना हो सकती है।

(2) **काई वर्ग द्वारा** *(K^2 - Method)* इस विधि में Y- प्रेक्षणों को Y- के आकार के अनुसार p वर्गों (classes) में विभाजित किया जाता है। पुन प्रत्येक वर्ग के लिए त्रुटि प्रसरण का परिकलन किया जाता है। सांख्यिकीय परिकल्पना परीक्षण के अनुसार निराकरणीय परिकल्पना H_o प्रत्येक विक्षोभ पद के प्रसरण समान है, के अन्तर्गत प्रतिदर्शज

$$\mu = -2 \log \lambda$$

लगभग काई वर्ग द्वारा बटित है, जिसकी स्वातन्त्र्य सख्या $(p-1)$ है जहाँ

1 Hetroscedasticty is likely to arise particularly in studies based on cross section data rather than time series data

$$\lambda = \frac{p}{\pi_{i=1}} \frac{S_i}{n_i}^{n_i/2} / \left|\sum_{i=1}^{p} S_i/n\right|^{n_i/2}$$

$$S \sum_{j=1}^{n} (Y_j - Y)^2$$

n_i -ith वर्ग मे पदों की सख्या, i-1 2 p

$$n = \sum_{i=1}^{p} n_i$$

निराकरणीय परिकल्पना अस्वीर की जाती है, तब इसका तात्पर्य है कि विक्षोभ पदों मे विषय विचालिता विद्यमान है।

(3) गोल्डफील्ड तथा क्वाट विधि [1] (Goldfield and Quandt Method) इस विधि में

$Y=\alpha+\beta X+u$

निदर्श का विश्लेषण किया गया है तथा यह मान लिया गया है कि विक्षोभ प्रसरण स्वतत्र चर के वर्ग का समानुपाती है, अर्थात्

$E(u_i^2) = \sigma^2 X_i^2$

एक व्याख्यात्मक चर वाले निदर्श का अध्ययन करने के लिये इस परीक्षण की विधि निम्न प्रकार है

(1) X चर के समस्त मानों को क्रम में रखा जाये, पुन उनमें से मध्य के c पद निकाल दिये जायें। गोल्डफील्ड तथा क्वाट के अनुसार यदि प्रेक्षणों की सख्या $n=30$ है तब $c=8$ तथा यदि $n=60$ है तब $c=16$ लिया जा सकता है।

---

1 **Goldfield and Quandt** Some Test for Homoscedasticity Journal of American *Statistical Association Vol 60 1965*

(ii) प्रथम $\frac{n-c}{2}$ प्रेक्षणों के लिये एक समाश्रयण रेखा साधारण न्यूनतम वर्ग *(OLS)* विधि द्वारा आसजित कीजिये। तथा अन्तिम $\frac{n-c}{2}$ प्रेक्षणों के लिये पृथक् समाश्रयण रेखा साधारण न्यूनतम वर्ग *(OLS)* विधि द्वारा आसजित कीजिये।

(iii) दोनों समाश्रण रेखाओं द्वारा उनके सगत अवशेषों के वर्गों के योग S_1 तथा S_2 निकालिये तथा पुन प्रतिदर्शज R को निम्न सूत्र द्वारा परिकलित कीजिये,

$$R=\frac{S_2}{S_1}$$

यहाँ $S_1 = X$ के छोटे माने में सगत अवशेषों के वर्ग का योग तथा $S_2=X$ के बडे मानों के सगत अवशेषों के वर्ग का योग

(iv) समविचालिता की परिकल्पना के अन्तर्गत R का बटन $[(n\text{-}c\text{-}2k/_2, (n\text{-}c\text{-}2k)/_2]$ स्वातन्त्र्य सख्याओं सहित F-बटन है।

(v) यदि निराकरणीय परिकल्पना अस्वीकार की जाती है, तब विषम विचालिता की स्थिति हो सकती है। यह विधि $n < 60$ के लिये उपयोगी है तथा इसकी सफलता c के मान पर निर्भर करती है।

आकलन विधियाँ (Estimation Procedures)[1]

हम निम्नाकित निदर्श पर विचार करें,

$$Y_t= \beta_1 X_{1t}+ \beta_2 X_{2t} = \quad +\beta_K X_{Kt}+e_t \qquad (11\ 1)$$
$$E(e_t)= 0 \qquad (11\ 2)$$
$$E(e^2_t)=\sigma^2 e_t \qquad (8\ 3)$$

उपरोक्त निदर्श में विक्षोभ पदों के प्रसरण समान नहीं हैं, अत साधारण न्यूनतम वर्ग *(OLS)* विधि द्वारा प्राप्त आकलक सर्वोत्तम रेखीय अनभिनत आकलक नहीं हो सकते। यदि, किसी प्रकार हमें $\sigma^2 e_t$ का मान ज्ञात हो तो चरों में निम्नाकित रूपान्तरण किया जा सकता है

$$Y'_t = Y_t/\sigma e_t \qquad (11\ 4)$$
$$X'_{it}= X_{it/\sigma et} \qquad (11\ 5)$$

1 Ros and Miller Applied Econometrics 1972

अब निर्दश (11 1) के स्थान पर हम निम्नलिखित निदर्श का आकलन कर सकते हैं

$$Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \quad + \beta_k X_{kt} + e_t \qquad (11\ 6)$$

यह समीकरण 11 1 का समानीत *(reduced)* रूप है, इसको प्रत्येक पद की त्रुटि मानक विचलन में विभाजित करके प्राप्त किया गया है।

अस्तु, (11 6) में, त्रुटि पद

$$e_t - \frac{e_t}{\sigma e_t} \qquad (11\ 7)$$

अतएव $\quad V(e_t) = V\frac{e_t}{\sigma e_t}$

$$= \frac{V(e_t)}{\sigma^2 e_t} = 1 \qquad (\ V(e_t) = \sigma^2 e_t] \qquad (11\ 8)$$

अर्थात् (11 1) को (11 6) में रूपान्तरित करने से स्थिर प्रसरण का समाश्रयण समीकरण प्राप्त होता है। यहा त्रुटि पद आपस में स्वतन्त्र हैं। इस प्रकार त्रुटि पद साधारण न्यूनतम वर्ग की मान्यताओं की पूर्ति करते हैं तथा (11 6) के आकलन द्वारा β के सर्वोत्तम रेखीय अनभिनत आकलक *(BLUE)* प्राप्त होते हैं।

यह विधि व्यावहारिक रूप में उपयोगी नहीं हो सकती है, क्योंकि प्राय हमें त्रुटि पद के प्रसरण ज्ञात नहीं होते। $\sigma^2 e_t$ के विषय में कुछ मान्यताएँ स्वीकार की जा सकती हैं अथवा प्रतिदर्शों की सहायता द्वारा इनका आकलन किया जा सकता है। अधिकतर प्रचलित मान्यता यह है कि त्रुटि पद का प्रसरण किसी व्याख्यात्मक चर के वर्ग के समानुपाती है। अर्थात्

$$V(e_t) = \sigma^2 e_t = \lambda X^2_{it}$$

यहाँ λ समानुपातिक स्थिराक है तथा X_{it} एक व्याख्यात्मक चर है।

उदाहरणार्थ, परिष्करण-शालाओं (Refineries) की अवाश्यकताओं के निम्न रैखिक वक्र पर विचार कीजिए।

$$Y_t - \beta_o + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_2 + \beta_2 X_{3t} + e_t \qquad (11\ 9)$$

यहाँ, Y = कच्चा तेल

X_1 = गैसोलीन

X_2 = मिट्टी का तेल

X_2 = ईंधन हेतु तेल

परिष्करण-शालाएँ (Refineries) विभिन्न आकार की हैं। लघु आकार की परिष्करण-शालाओं के अन्तर्गत त्रुटि पदों का प्रसरण कम मात्रा में तथा वृहदाकार परिष्करण-शालाओं के अन्तर्गत प्रसरण अधिक मात्रा में माना जा सकता है, यद्यपि आवश्यकता फलन समस्त परिष्करण-शालाओं हेतु एक ही लिया गया है। त्रुटि पद के प्रसरण को निम्न प्रकार लिख सकते हैं,

$$V(e_t)=\sigma e^2_t = \lambda X^2_{ut} \quad (11\ 10)$$

यहाँ X_{ut} ईंवीं परिष्करण-शाला की धारिता (capacity) है।

इस स्थिति में चरों का रूपान्तरण निम्न प्रकार है

$$Y'_t=Y_t/X_{ut} \quad (11\ 10)$$

$$X'_{it}=X_{it}/X_{ut} \quad (11\ 11)$$

$$i=1,2,3 \quad (11\ 12)$$

यह रूपान्तरण समीकरण (11 9) को इस प्रकार समायोजित करता है, जिससे कि साधारण न्यूनतम वर्ग की मान्यताओं की पूर्ति हो सके तथा इसके द्वारा प्राप्त आकलक *(BLUE)* हों।

प्रत्येक परिष्करण-शाला की धारिता के आँकड़े ज्ञात हैं, अत समीकरण (11 6) का आकलन किया जा सकता है। आकलित समीकरण निम्नांकित है

$$(Y_t/X_{ut})= \beta+\beta_o\ (1/X_{ut})+\beta\delta_1\ (X_{1t}/X_{ut})$$
$$+\beta_2(X_{2t}/X_{ut})+\beta_3\ (X_{2t}/X_{ut})+e_t \quad (11\ 13)$$

यहाँ स्थिराक पद β को सक्षिप्त आँकडों की अर्थपूर्ण[1] रचना हेतु लिया गया है जबकि समीकरण 11.6 में इस प्रकार का पद नहीं था।

बहुसंरेखता
(Multicollinearity)

रेखीय समीकरणों के आकलन में प्राय 'बहुसंरेखता' की समस्या उत्पन्न हो जाती है। यदि समीकरण में एक से अधिक स्वतन्त्र चर हों तथा वे परस्पर सहसम्बन्धित हों, तब

1 A common practice in examples of this type is to include X_4 also as a part of the model (11 1) so that the constant term β can be legitimately interpreted as the coefficient of X_4. Even if X_4 does not belong to the true model, we can introduce the constant term β as an **irrelevant variable** with mean value of Zero When the constant term is not estimated, the summary statistics (the R^2 and the standard errors), even though they can be computed, cannot be interpreted in the usual way

आकलित प्राचलों के प्रतिचयन प्रसरणों (Sampling variances) के मानों में वृद्धि की प्रवृत्ति हो सकती है। अस्तु, यदि दो स्वतंत्र चर X_1 तथा X_2 सहसम्बन्धित है तब प्राचल $\beta E1$ तथा β_2 का सार्थक होना असम्भाव्य है। यद्यपि आश्रित चर पद दोनों चरो का सयुक्त प्रभाव सार्थक हो सकता है, परन्तु इन दोनों चरों में उच्च सहसम्बन्ध के कारण उनका पृथक्-पृथक् प्रभाव ज्ञात करना कठिन है। उदाहरणार्थ, समाश्रयण समीकरण

$$Y=\beta_o+\beta_1X_1+\beta_2X_2 \qquad (11\ 14)$$

के लिये अवधारण गुणाक R^2 अधिक सार्थक हो सकता है, किन्तु प्राचल β_1 तथा β_2 सार्थक नहीं हो सकते।

बहु सरेखता की समस्या तभी उत्पन्न होती है, जबकि दो अथवा अधिक स्वतन्त्र चरों में परम शुद्ध रेखीय सम्बन्ध होता है। काल-श्रेणी तथा अनुप्रस्थ दोनों प्रकार के आँकडों में बहुसरेखता पाई जाती है।

बहुसरेखता का 'चरणानुसार' समाश्रयण विधि पर महत्त्वपूर्ण प्रभाव है। चरणानुसार *समाश्रयण विधि के अन्तर्गत सर्वप्रथम समाश्रयण रेखा*

$$Y=\beta_o+\beta_1X_1 \qquad (11\ 15)$$

का आकलन किया जाता है। यदि गुणाक β_1 सार्थक पाया जाता है, तब चर X_1 को समाश्रयण में रखा जायेगा तथा नवीन समाश्रयण की रचना द्वितीय चर X_2 को सम्मिलित करके की जायेगी। यदि चर X_2 आश्रित चर के विचलन का सार्थक अतिरिक्त स्पष्टीकरण नहीं करता (अर्थात् β_2 सार्थक नहीं है) तब X_2 चर को समाश्रयण से पूर्ण रूप से निकाल दिया जाता है। यदि X_1 तथा X_2 के मध्य उच्च परिमाणीय सहसम्बन्ध हो तब β_1 सार्थक हो सकता है, जबकि β_2 सार्थक नहीं हो सकता। यदि पहले X_2 पर समाश्रयण निकाला जाये तो β_2 सार्थक हो सकता है, जबकि β_1 सार्थक नहीं हो सकता, अर्थात् यदि उच्च स्तर की बहुसरेखता विद्यमान हो तो चरों के समाश्रयण में प्रवेश के क्रम का, उन चरों को समाश्रयण में सम्मिलित करने अथवा उनके परित्याग करने का अत्यधिक प्रभाव होता है।

बहुसरेखता की सगत समस्याओं को समझने हेतु निम्नाकित सख्यात्मक उदाहरण प्रस्तुत किया जाता है,

Y	9	5	8	6	8	5	9	6	कल्पित आँकडे
X_1	9	4	8	7	8	4	9	7	
X_2	7	2	4	3	4	2	7	3	

यहाँ X_1 तथा X_2 में उच्च परिमाणीय सहसम्बन्ध है, क्योंकि R सहसम्बन्ध गुणाक का मान 0 857 है।

अब केवल X_1 पर Y का समाश्रयण लेने पर हमें निम्नांकित समाश्रयण समीकरण प्राप्त होता है

$$Y = 1\ 56 + 0\ 79X_1$$

X_1 के गुणक (β_1) का आकलित मानक विचलन (Estimated standard deviation) का मान 0 31 है। अत t अनुपात निम्नांकित है

$$t = \frac{0\ 79}{0\ 31} = 2\ 548$$

तथा स्वातन्त्र्य संख्या 6 है। t का मान 5% सार्थकता स्तर पर सार्थक है।

यदि, किसी प्रकार, हम X_1 तथा X_2 दोनों चरों को प्रतिगमक (Regressors) के समान प्रयुक्त करते है, तब हमे निम्नांकित समाश्रयण समीकरण प्राप्त होता है

$$Y = 2\ 35 + 0\ 42X_1 + 0\ 42X_2$$

X_1 तथा X_2 दोनों के गुणकों (क्रमश β_1 तथा β_2) के आकलित मानक विचलन का मान 0 43 है। अस्तु 5% सार्थकता स्तर पर कोई भी गुणक सार्थक नहीं है।

यहाँ हमें ज्ञात होता है कि जब X_2 समाश्रयण में सम्मिलित किया जाता है तब X_1 का गुणक (β_1) सुस्पष्ट रूप से परिवर्तित हो जाता है। यह गुणक β_1 पहले से लगभग आधा रह जाता है। यह ही बहुसंरेखता का गुण है। यदि X_1 तथा X_2 असम्बन्धित होते तब X_2 के समायोजित किये जाने पर β_1 के मान में परिवर्तन नहीं होता।

अतएव बहुसंरेखता की स्थिति में आकलकों के प्रसरणों के मान में वृद्धि हो जाती है तथा चरों की सार्थकता ज्ञात करना कठिन हो जाता है। बहुसंरेखता से न्यूनतम वर्ग आकलकों की अनभिनता तथा क्षमता का ह्रास नहीं होता।

सक्षेप में बहुसंरेखता के निम्नांकित परिणाम हो सकते है

(1) स्वतन्त्र चरों के आकलनो के प्रसरणों के मान में वृद्धि हो जाती है तथा उनका पृथक्-पृथक् प्रभाव ज्ञात नहीं किया जा सकता।

(2) 'चरणानुसार' समाश्रयण विधि में किन्हीं चरों को समाश्रयण से पूर्ण रूप से पृथक् करना एक त्रुटिपूर्ण निर्णय हो सकता है।

(3) गुणाकों के आकलन अति सवेदनशील हो सकते है तथा कुछ अतिरिक्त प्रेक्षणों के सम्मिलित करने पर गुणाकों में प्रभावशाली विवर्तन हो सकता है।

जब समाश्रयण समीकरण में अनेक प्राचलों का आकलन करना होता है तब β को आव्यूह रूप में निम्न प्रकार लिखा जाता है

$$\beta = (X'X)^{-1} X'Y \quad (11\ 16)$$

यदि स्वतन्त्र चरों में रेखीय सम्बन्ध हो तब आव्यूह $(X'X)$ एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह होगा, जिसका व्युत्क्रम सम्भव नहीं है। व्यावहारिक अर्थमितिविद् द्वारा आव्यूह का व्युत्क्रम सामान्यत एक ही चरण में नहीं किया जाता है। एक समय में एक चर को सम्मिलित करके (Pivoting in) आव्यूह व्युत्क्रम ज्ञात किया जाता है। यदि सम्मिलित चर पूर्व सम्मिलित चरों का फलन है, तब विकर्ण अवयव शून्य हो जाता है अथवा शून्य के सन्निकट हो जाता है। जबकि परिकलन त्रुटियाँ विद्यमान हों। इस प्रकार के चरों को सुगमतापूर्वक ज्ञात किया जा सकता है। अधिकाश गणन प्रक्रम प्रत्येक चरण में शून्य अवयव का निरीक्षण करते हैं। जिसके द्वारा शोधकर्ता को किसी रेखीय सम्बन्ध का बोध हो जाता है। इस समस्या का समाधान स्वतन्त्र चर को उचित रूप में परिभाषित करके किया जा सकता है।

अनेक विधियों द्वारा बहुसरेखता द्वारा उत्पन्न समस्याओं का समाधान किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, कभी-कभी बहुसरेखता को निदर्श के विनिर्देश में परिवर्तन करके दूर किया जा सकता है। निम्नलिखित निदर्श का अध्ययन कीजिए

$$S_t=\beta_o+\beta_1 L_1+\beta_2 R_t+\beta_3 X_{3t}+\beta_4 X_{4t}+e_t \quad (11\ 17)$$

यहाँ S = बिक्री आगम

L = विक्रय किये गये बाँये जूतों की सख्या

R = विक्रय किये गये दाँये जूतो की सख्या

X_3, X_4 विक्रय किये गये अन्य उत्पाद

बायाँ तथा दायाँ दोनों प्रकार के जूतों की बिक्री से आगम प्राप्त होता है, अतएव बिक्री आगम में हुये उच्चावचनों का स्पष्टीकरण करने हेतु प्रत्येक का उचित हल है। परन्तु समीकरण 11 17 मे कुछ प्राचलों का अर्थपूर्ण निवर्चन सम्भव नहीं है। उदाहरणार्थ, प्राचल β_1 बाये जूते (L) के सापेक्ष S का आशिक अवकलज है, जबकि अन्य चर (दाये जूते सहित) स्थिर हों। इस प्रकार की अवस्था कभी नहीं हो सकती क्योंकि जूते सदैव युगल *(pairs)* रूप में ही बेचे जाते हैं। यद्यपि β_1 तथा β_2 को किसी प्रकार ज्ञात कर भी लिया जाये तथापि उनका निवर्चन नहीं किया जा सकता है। यह समस्या तब उत्पन्न होती है, जबकि स्वतत्र चरों में निश्चित सम्बन्ध विद्यमान हो।

निश्चित सम्बन्ध किसी प्रकार भी सम्भव हुआ हो, बहुसरेखता की समस्या उत्पन्न नहीं हो, इसके लिए प्राचलों को इस प्रकार परिभाषित किया जाना चाहिए, जिससे कि उनका निवर्चन सम्भव हो सके। उपरोक्त उदाहरण में चरों (बाँया जूता तथा दाया जूता) के स्थान पर 'जूतों का एक युगल' प्रयोग किया जा सकता है। तब समीकरण 11 17 को निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है।

$$S_t=\beta_o+\beta_1 P_1+\beta_3 X_{3t}+\beta_4 X_{4t}+e_t \quad (11\ 18)$$

यहाँ P = विक्री किये गये जूतों के युगलों की संख्या

यह समीकरण बहुसंरेखता की समस्या से मुक्त है तथा प्राचलों का आकलन साधारण न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा किया जा सकता है।

पुन, यदि बहुसंरेखता विद्यमान है, तब समाश्रयण समीकरण में से किसी एक चर का परित्याग करने से आश्रित चर के स्पष्टीकरण में कमी नहीं होगी। निम्न समीकरण पर विचार कीजिये,

$$Y_t=\beta_0+\beta_1X_{1t}+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+e_t \qquad (11\ 19)$$

मान लो X_1 तथा X_3 में रेखीय सम्बन्ध है जिसके फलस्वरूप बहुसंरेखता की समस्या उत्पन्न होती है

$$X_{3t}=a+bX_{1t} \qquad (11\ 20)$$

तब समीकरण (11 19) के स्थान पर निम्नांकित समीकरण का आकलन किया जाता है

$$Y_t=\beta_0+\beta_1X_{1t}+\beta_2X_{2t}+e_t \qquad (11\ 21)$$

यहाँ, $E(\beta_1)=\beta_1+\beta_3b \qquad (11\ 22)$

$$E(\beta_2)=\beta_2 \qquad (11\ 23)$$

चूँकि X_3 को स्वैच्छिक इकाई के रूप में परिभाषित किया जा सकता है, अतएव $b=1$ मान लेने पर समीकरण (11 22) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है.

$$E(\beta_1)=\beta_1+\beta_2 \qquad (11\ 24)$$

तात्पर्य यह है कि चर X_3 का सम्पूर्ण प्रभाव सम्मिलित चर में निहित रहता है तथा अन्य चर पूर्णतया अप्रभावित रहते हैं।

स्मरणीय है कि जब शोधकर्त्ता आश्रित चर के उच्चावचनों को स्पष्ट करने का इच्छुक होता है अथवा Y के मान का पूर्वानुमान करना चाहता है, तब X_2 के समाश्रयण निदर्श में विद्यमान रहने अथवा न रहने का कोई प्रभाव नहीं होता। इसके अतिरिक्त यदि उद्देश्य अन्य स्वतन्त्र चरो के गुणाको का आकलन करना होता है, उदाहरणार्थ, β_2, तब X_3 का परित्याग करने से आकलकों पर कोई प्रभाव नहीं होगा। X_1 तथा X_3 दोनों के प्रभाव को निरस्त करना गणनात्मक दृष्टि से असम्भव कार्य है।

अर्थमितिज्ञ की मुख्य समस्या यह है कि किस चर का परित्याग किया जाये तथा किन चरों को समाश्रयण समीकरण में सम्मिलित किया जाए।

इसके लिये कुछ नियम उपलब्ध है, परन्तु व्यावहारिक अर्थमितिज्ञ उनके द्वारा उचित निर्णय नहीं ले सकता है।

एम फ्रीडमैन (M Freedman) के अनुसार– "*यह निर्णय करना है कि किन चरो का परित्याग किया जाये अथवा नहीं, व प्रमाण योग्य घटना को प्रभावित करना अथवा नहीं तथा निदर्श मे किन अवयवो द्वारा अभिज्ञान किया जाता है, ऐसे तथ्य है जोकि व्यक्त नहीं किए जा सकते है, इनका अध्ययन केवल अनुभव एव अभ्यास द्वारा उचित वैज्ञानिक वातावरण म ही किया जा सकता है इनको यन्त्रवत् ज्ञात नहीं किया जा सकता है।*'[1]

अतएव, अल्प ज्ञान के फलस्वरूप समाश्रयण निदर्श को त्रुटिपूर्ण रूप से ही विनिर्दिष्ट (mis-specified) किया जा सकता है। इस त्रुटि को विनिर्देश त्रुटि (specification error) कहते है। सामान्यत विनिर्देश त्रुटि के निम्नलिखित चार कारण है

(i) *सम्बन्ध चर का परित्याग करना।*

(ii) *असम्बन्ध चर को सम्मिलित करना।*

(iii) *व्याख्यात्मक चरो में से किसी एक म हुये परिमाणात्मक परिवर्तन की उपेक्षा करना।*

(iv) समाश्रयण समीकरण का त्रुटिपूर्ण गणितीय रूप।

समाश्रयण में प्रतिपत्री चर
(Proxy Variables in Regression)

अनुभवयुक्त शोध के अन्तर्गत प्राय आँकडों के अभाव की समस्या उत्पन्न हो जाती है। यद्यपि निदर्श मे सम्मिलित किये जाने वाले चरो का पूर्ण ज्ञान है, परन्तु कुछ चरों का मापाकन नहीं किया जा सकता, अथवा कुछ आँकडे अप्राप्य है, तब हमें हानि होती है। साधारण न्यूनतम वर्ग आक्लक केवल तभी अनभिनत होते है, जबकि सैद्धान्तिक रूप में निर्दिष्ट समस्त चरों को समाश्रयण में सम्मिलित किया जा सके।

किसी चर का परित्याग करने के फलस्वरूप उत्पन्न अभिनीत को दूर करने हेतु हम एक ऐसा चर ज्ञात कर सकते है, जोकि अप्राप्य चर का सन्निकट प्रतिस्थापन (close substitute) हो, उदाहरणार्थ, *उत्पादनफलन के आकलन में,* "मौसम" को एक स्वतन्त्र चर *लिया जा सकता है, परन्तु इस चर का मापाकन सम्भव नहीं है,* अतएव 'वर्षा' को इसका *सन्निकट प्रतिस्थापन माना जा सकता है।* चूँकि 'वर्षा' के आँकडे सरलतापूर्वक उपलब्ध हैं, *अतएव यह एक स्वीकार्य स्थानापन्न हैं।*

---

1 M. Friedman Essays in Positive Economics, University of Chicago Press (Chicago) 1953, P 25

सैद्धान्तिक रूप से परिभाषित चर हेतु स्थानापन्न चर को 'प्रतिपत्री चर' कहते हैं। अनुभव युक्त शोध में इसका अत्यधिक उपयोग किया जाता है। प्रतिपत्री चर का उचित उपयोग करने हेतु स्थानापन्न से होने वाले प्रभावों का अध्ययन आवश्यक है।

सरल समाश्रयण समीकरण,

$$Y_t = \beta_1 x_t + e_t \qquad (11\ 25)$$

पर विचार कीजिये, यहाँ समस्त चर स्वयं के समानान्तर माध्य से विचलित है।

मान लो X हेतु आँकड़े उपलब्ध नहीं है, तब अन्य चर z को इसके स्थान पर लिया जा सकता है। फलस्वरूप आकलित समीकरण निम्न प्रकार है

$$Y_t = \beta_1 z_t + e_t \qquad (11\ 26)$$

यहाँ $$\beta_1 = \frac{\Sigma z_t y_t}{\Sigma z_t^2} \qquad (11\ 27)$$

β_1 का साधारण न्यूनतम वर्ग आकलक है।
y के स्थान पर $\beta_1 x_t + e_t$ रखने पर,

$$\beta_1 = \frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2}$$

$$= \frac{\sum z_t (\beta_1 x_t + e_t)}{\sum z_t^2}$$

$$= \frac{\beta_1 \sum z_t x_t}{\sum z_t^2} + \frac{\sum z_t e_t}{\sum z_t^2} \qquad (11\ 28)$$

तथा $$E(\beta) = \beta_1 b_{xz} \qquad (11\ 29)$$

यहाँ $b_{xz} = \frac{\sum z_t x_t}{\Sigma z_t^2}$

तथा $E(e_t) = 0$, मान्यतानुसार

अत β_1 β_1 का अनभिनत आकलन नहीं है जब तक कि b_{xz} का मान 1 के बराबर न हो।

b_{xz} गणात्मक रूप में b के समकक्ष है,
यहाँ b समाश्रयण समीकरण

$$x_t = bz_t + e_t \qquad (11\ 30)$$

द्वारा परिभाषित है।

यहाँ $$b = \frac{\sum z_t x_t}{\sum z_t^2}$$

जब x तथा z का मापन विभिन्न इकाइयों में किया जाता है, तब गुणांक b रूपान्तर की इकाई को मापता है। यह उल्लेखनीय है कि यदि x की इकाई z की इकाई से भिन्न है, तब समाश्रयण आकलक β_i की इकाई β_i की इकाई से भिन्न होगी तथा b रूपान्तर कारक है। यदि x तथा z का मापन समान इकाई में किया जाता है तब भी b का मान एक से भिन्न होगा $(b \neq 1)$ जो इन दोनों चरो के समानता सोपान पर निर्भर करेगा।

समाश्रयण में मूक चर
(Dummy Variables in Regression)

मूक चर प्राय गुणात्मक चरो के साथ सम्बन्द्ध किये जाते है, परन्तु वर्तमान काल में इनका प्रयोग अन्य स्थितियों मे भी किया जाने लगा है। उदाहरणार्थ, आँकड़ों के विषय में पूर्ण ज्ञान प्राप्त करने हेतु प्रारम्भिक अन्वेषण। समाश्रयण विश्लेषण के अन्तर्गत मूक चरों के उपयोग के अनेक उदाहरण आधुनिक अर्थमिति शोध मे प्राप्त होते है। ये मूक चर अस्थायी प्रभाव को प्रदर्शित करने हेतु प्रयोग किये जाते है। उदाहरणार्थ, युद्ध काल तथा शान्ति काल के मध्य, विभिन्न ऋतुओ के मध्य अथवा विभिन्न राजनैतिक क्षेत्रों के मध्य, सम्बन्धों में परिवर्तन। लिंग, वैवाहिक अवस्था, व्यावसायिक अथवा सामाजिक स्तर, आदि गुणात्मक चरों को मूकचरों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। कभी-कभी परिमाणात्मक चरों को भी मूक चरो द्वारा व्यक्त किया जा सकता है उदाहरणार्थ, आयु।

मूक चर तकनीक द्वारा शोधकर्ता निश्चित चरों के विषय में ज्ञात सूचना को असतत वर्गों में विभाजित करता है, जहाँ प्रत्येक वर्ग को 0 अथवा 1 मूक मान प्रदान किये जाते है। मानलो शोधकर्ता को बाह्य रूप से ज्ञात है कि आँकड़ों को अनेक वर्गों में विभाजित किया जा सकता है। उसका विश्वास है कि प्रत्येक वर्ग में प्रेक्षणों के प्राचल समान हैं, परन्तु विभिन्न वर्गों के प्रेक्षणों हेतु प्राचलों के विभिन्न समुच्चय है। वर्गों में विभेद करते हुये उनके मध्य इस प्रकार की विभिन्नता उत्पन्न की जा सकती है। वर्गों के तादात्म्य हेतु मूक चरों का उपयोग सुविधाजनक है।

उदाहरणार्थ, निम्नलिखित समाश्रयण समीकरण का अध्ययन कीजिये

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + e_t \qquad (8\ 31)$$

यह समीकरण मनोरजन व्यय (Y) का चलचित्रों की सख्या (X_1) तथा वैध रूप से विक्रय किये गये मद्य की मात्रा (X_2) पर समाश्रयण व्यक्त करता है।

मद्यनिषेध काल में चर X_2 का मान शून्य के बराबर है तथा मद्यनिषेध काल के पश्चात् X_2 का मान शून्य से अधिक है। यदि β_2 का मान शून्य नहीं है, तब समीकरण (11 31) द्वारा निषेध काल की अवधि में Y के व्यवहार को स्पष्ट किया जा सकता है, क्योंकि चर X_2 का मान शून्य होगा तथा समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + e_t \qquad (11\ 32)$$

यदि चर X_2 किसी एक वर्ग से सम्बन्धित हो तथा अन्य वर्गों से किसी प्रकार सम्बन्द नहीं हो तब भी यह ही तर्क प्रस्तुत किया जा सकता है। X_2 के अप्रासंगिक चर की अवस्था में गुणाक β_2 को शून्य मान लिया जाता है, (जैसा कि समीकरण 11 32 में) अथवा X_2 का मान शून्य मान लिया जाता है। जिस वर्ग मे X_2 चर प्रासंगिक नहीं है, उस वर्ग मे इसका मान शून्य के बराबर लिया जाता है तथा उस वर्ग में जहाँ कि यह प्रासंगिक है, इसके प्रेक्षित मान ही रखे जाते है, दोनों वर्गों के लिए एक ही समाश्रयण समीकरण का प्रयोग किया जा सकता है।

पुन , यदि अर्थमितिज्ञ को यह ज्ञात है कि X_2 प्रासंगिक चर है अथवा नहीं, तब वह सगत सख्या लिख सकता है, अर्थात् शून्य अथवा प्रेक्षित मान अथवा X_2 के प्रेक्षित मानों को अपरिवर्तित रखते हुये वह एक मूक चर D परिभाषित कर सकता है। यहाँ $D = 0$, जबकि X_2 अप्रासंगिक है तथा $D = 1$ जबकि X_2 प्रासंगिक है।

इस प्रकार X_2 पर प्राप्त आँकडों को विभिन्न वर्गों मे विभाजित करने हेतु वह मूक चर D का उपयोग करता है।

मूक चर तकनीक के उपयोग का मुख्य लाभ यह है कि यह पर्याप्त लचीलापन स्वीकार करती है। उदाहरणार्थ, उस स्थिति पर विचार कीजिये जबकि आँकडें वर्गों में विभाजित हों तथा उनके लिए चर X_1 तथा X_2 प्रासंगिक हों, परन्तु दोनों वर्गों में अन्य प्राचलों के समान रहने पर X_2 के गुणाक असमान होते हैं। इस स्थिति के अन्तर्गत अर्थमितिज्ञ निम्नलिखित समाश्रयण का आकलन कर सकता है, जिसमें दो वर्गों की सूचना को मूक चरों के रूप में व्यक्त किया गया है

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 (D_2 X_{2t}) + e_t \qquad (11\ 33)$$

यहाँ D = मूक चर,

$D = 0$ जबकि प्रेक्षण एक वर्ग से सम्बद्ध हो,

तथा $D = 1$ जबकि प्रेक्षण अन्य वर्ग से सम्बद्ध हो।

जब $D = 0$, तब आँकडे 'प्रथम वर्ग' के सगत हैं तथा प्रासगिक समाश्रयण समीकरण निम्न प्रकार है।

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + e_t \qquad (11.34)$$

12

अभिनिर्धारण एवं युगपत् समीकरण समस्याएँ
(Identification and Simultaneous Equation Problems)

युगपत् समीकरण निदर्श
(Simultaneous Equation Model)

इस अध्याय में हम उन अर्थमितीय निदर्शों का अध्ययन करेंगे, जिनके अन्तर्गत एक से अधिक समीकरणों का आकलन किया जाता है। ये निदर्श 'युगपत् समीकरण निदर्श' कहे जाते है, क्योंकि इनमें निहित चर समस्त समीकरणों की सन्तुष्टि करते है। उदाहरणार्थ, बाजार निदर्श में एक माँग समीकरण तथा एक पूर्ति समीकरण होता है। अर्थव्यवस्था के सामूहिक निदर्श में सैकड़ों समीकरण होते है। अस्तु, आर्थिक निदर्श की सरचना में एक से अधिक समीकरण के विद्यमान रहने पर पूर्व अध्यायों में वर्णित आकलन विधियाँ उपयुक्त नहीं हो सकती हैं। अस्तु, युगपत् समीकरणों के आकलन हेतु अनेक वैकल्पिक आकलन विधियों को विकसित किया गया है। युगपत् अथवा बहु समीकरण निदर्श के प्राचलों का आकलन करने की विधियों को युगपत् आकलन विधियाँ (Simultaneous estimation procedures) कहा जाता है।

युगपत् समीकरण निदर्शों में अभिनति (Bias in Simultaneous Equation Models)

बहुसमीकरण निदर्श के एक समीकरण का आकलन करने के फलस्वरूप आकलित समीकरण के सही होते हुये भी आकलकों में अभिनति उत्पन्न हो जाती है, क्योंकि इस विधि द्वारा अन्य समीकरणों की उपेक्षा की जाती है।

निदर्श में अन्य समीकरणों की उपस्थिति के फलस्वरूप उत्पन्न अभिनति को युगपत्ता अभिनति (Simultaneous bias) कहते हैं। साधारण न्यूनतम वर्ग आकलन विधि (Ordinary least squares estimation procedure) को प्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि (Direct least squares procedure) कहा जाता है।

इस विधि के अन्तर्गत अभिनति का स्रोत ज्ञात करने हेतु हम माँग तथा पूर्ति के एक सरल निदर्श का अध्ययन करेंगे

माँग समीकरण $D_t = a+bP_t+U_t$ (12 1)

यहाँ D_t = माँगी गई मात्रा, P_t = वस्तु की कीमत, U_t = त्रुटि पद — t समयावधि में

समीकरण (12 1) द्वारा स्पष्ट है कि वस्तु विशेष की t समयावधि में माँगी गई मात्रा कीमत (P_t) तथा त्रुटि पद (U_t) का फलन है।

पूर्ति समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

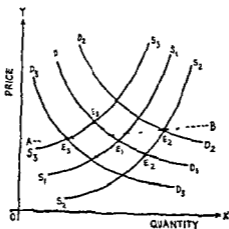
$$S_t = c+dP_t+V_t \quad (12\ 2)$$

यहाँ S_t = पूरित मात्रा, P_t = कीमत, V_t = त्रुटि पद — t समयावधि में

समीकरण (12 2) द्वारा स्पष्ट है कि वस्तु विशेष की t समयावधि में पूरित मात्रा कीमत (P_t) तथा त्रुटि पद (V_t) का फलन है। बाजार सतुलन हेतु यह आवश्यक है कि वस्तु की माँगी गई मात्रा तथा पूरित मात्रा में समानता हो। अर्थात्,

$$D_t = S_t \quad (12\ 3)$$

सतुलित कीमत तथा उस कीमत पर विक्रय की गई वस्तु की मात्रा, माँग तथा पूर्ति तालिका (schedules) के प्रतिच्छेदन बिन्दु द्वारा व्यक्त होती है।

माँग तथा पूर्ति वक्रों के प्राचल प्रायऽ अज्ञात होते हैं, जिनको प्रेक्षित आँकड़ों द्वारा आकलित किया जाता है। ये आँकड़ें सतुलित कीमत तथा बाजार में विक्रय की गई मात्रा के रूप में होते हैं। इस स्थिति में प्रत्येक प्रेक्षण द्वारा केवल कीमत तथा विक्रय की गई मात्रा का एक-एक मान प्राप्त होता है। वास्तविक रूप में वस्तु की कीमत तथा विक्रय की गई मात्रा में समय के अनुसार परिवर्तन होता रहता है, परन्तु हम यह मानते हैं कि ये विचरण बाजार समाशोधन (Market-clearing) हैं। अस्तु, ये विचरण उत्पन्न होते हैं, क्योंकि त्रुटि पदों के फलस्वरूप माँग तथा पूर्ति वक्रों का पर्ययण होता रहता है।

रेखाचित्र 12 1

मानलो रेखाचित्र (12 1) में प्रदर्शित माँग वक्र का त्रुटि पदों में उच्चावचन के कारण प्रत्येक समयावधि मे पर्यायण होता है। अर्थात् समयावधि 1,2 तथा 3 मे माँग वक्र क्रमश D_1D_1, D_2D_2, तथा D_3D_3 है। यदि पूर्ति वक्र का S_1S_1 से S_2S_2 तथा S_2S_2 से S_3S_3 तक पर्यायण होता है, तब सतुलित कीमते तथा मात्राएँ बिन्दुओं E_1 E_2 तथा E_3 द्वारा प्रदर्शित की गई है। यदि इन तीन सतुलित बिन्दुओं में न्यूनतम वर्ग रेखा आमजित की जाये तो हमे सरल रेखा AB प्राप्त होती है। यह रेखा AB न माँग वक्र है और न ही पूर्ति वक्र, परन्तु यह माँग तथा पूर्ति के मध्य आडी-तिरछी कुछ वस्तु है। यदि AB को माँग वक्र माना जाये तब प्राचलों के आकलन अधोगामी अभिनत है। रेखा AB का ढाल माँग वक्र के ढाल से अत्यधिक कम है। यदि रेखा AB को पूर्ति वक्र माना जावे तो प्राचलों के आकलन ऊर्ध्वगामी अभिनत है।

यदि माँग वक्र स्थिर रहता है तथा पूर्तिवक्र का (त्रुटि पदों में उच्चावचन के फलस्वरूप) पर्यायण होता है तब तीन सतुलन बिन्दु E_1 E_2 तथा E_3 होंगे। इन बिन्दुओं में न्यूनतम वर्ग रेखा द्वारा माँग वक्र का अनभिनत आकलन प्राप्त होगा। अस्तु, निष्कर्ष यह है कि साधारण न्यूनतम वर्ग विधि *(OLS)* द्वारा विशेष परिस्थितियों मे ही अनभिनत आकलक प्राप्त होते है। सामान्य रूप में, यह विधि उस स्थिति में अनुपयुक्त है, जबकि आर्थिक चरों के मान एक साथ कई समीकरणों द्वारा निर्धारित होते हैं।

पुन हमें माँग फलन (12 1) तथा पूर्तिफलन (12 2) में समानता दृष्टिगोचर होती है, क्योंकि सतुलन की स्थिति में माँग पूर्ति के बराबर होती है, तथा दोनों समीकरणों में समान चर हैं। माँगी गई मात्रा (= पूरित की गई मात्रा) तथा कीमत। अस्तु, जब दो विभिन्न समीकरणों में समान चर सम्मिलित हों, तब किसी एक समीकरण द्वारा प्राचलों का आकलन असम्भव है, जैसा कि रेखाचित्र (12 1) से स्पष्ट है। यदि कीमत का मात्रा पर समाश्रयण लेते हैं तब

हमें माँग वक्र तथा पूर्ति वक्र के मध्य एक रेखा प्राप्त होती है। इस स्थिति में हम यह कह सकते हैं कि इन समीकरणों का सांख्यिकीय रूप में अभिनिर्धारण (Identification) सम्भव नहीं है।

हम यह मान लेते हैं कि माँग तथा पूर्ति समीकरण में समानता प्रतीत नहीं होती है तथा हम साख्यिकीय विधि द्वारा दोनो समीकरणों का अभिनिर्धारण कर सकते हैं।[1] मान लो माँग समीकरण में आय चर (Y) तथा पूर्ति समीकरण में मौसम चर (W) विद्यमान हैं। माँग तथा पूर्ति समीकरण निम्न प्रकार है

$D_t=\beta_o+\beta_1 P_t+\beta_2 Y_t+U_t$ माँग समीकरण (12 4)

$S_t=\alpha_0+\alpha_o P_t+\alpha_2 W_t+V_t$ पूर्ति समीकरण (12 5)

यहाँ, सतुलन की स्थिति में, $D_t=S_t$

तथा $\beta_o, \beta_1, \beta_2$ एव $\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2$ प्राचल हैं।

यद्यपि माँग तथा पूर्ति समीकरण का अभिनिर्धारण करना सम्भव है, परन्तु दानों समीकरणों के प्राचलों के प्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग आकलन अभिनत है।

ये न्यूनतम वर्ग आकलक अभिनत हैं, क्योंकि कीमत मान P_t (स्वतत्र चर) तथा त्रुटि पद U_t (अथवा V_t जो सम्भव हो) में सहसम्बन्ध पाया जाता है।[2]

अतएव आश्रित चर एव स्वतत्र चर के मान त्रुटि पदों पर निर्भर करते हैं। अस्तु हम निदर्श को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं

$$q_d = \beta p+u \quad (12\ 6)$$

$$q_s=\alpha p+v \quad (12\ 7)$$

यहाँ पर, चर q_d, q_s तथा p अपने सगत माध्यों (Respective means) के विचलन रूप में व्यक्त किये गये हैं। अर्थात्

$$\Sigma q_d = \Sigma q_s=\sum p=0$$

प्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्रेक्षित आँकडो q मात्रा) तथा p द्वारा माँग समीकरण (12 6) के प्राचल β का आकलन निम्नलिखित है

$$\beta=\Sigma pq/\Sigma p^2 \quad (12\ 8)$$

1 इस स्थिति के अभिनिर्धारण की विवेचना अग्रिम पृष्ठों में की जाएगी।

2. पूर्व अध्यायों में हम अध्ययन कर चुके हैं कि यदि स्वतत्र चर तथा त्रुटि पद सहसम्बन्धित नहीं हैं तब समाश्रयण गुणाक (Coefficient of a regression equation) अनभिनत हैं।

$$= \frac{\Sigma p(\beta p+u)}{\Sigma p^2} \qquad (\text{ समीकरण (12 6) से सम्बन्ध } q=\beta p+u)$$

$$= \beta + \frac{\Sigma pu}{\Sigma p^2} \tag{12 9}$$

चूँकि b तथा p के मान समीकरण (12 6) तथा (12 7) द्वारा एक साथ निर्धारित होते है, अतएव पुनरावृति प्रयोगों में p के मानो को स्थिर नहीं माना जा सकता है जैसा कि हमने पूर्व अध्यायो में मान लिया था।

p का मान पूर्णरूप से u तथा v के पदों में व्यक्त किया जा सकता है अस्तु सतुलन समीकरण $q_d = q_s$ द्वारा हमे प्राप्त होता है,

$$\beta p+u=\alpha p+v \tag{12 10}$$

अथवा $$p=\frac{u-v}{\alpha-\beta} \tag{12 11}$$

दोनो ओर u से गुणा करके योग लेने पर,

$$\Sigma pu = \frac{\Sigma u(u-v)}{\alpha-\beta} = \frac{\Sigma(u^2-uv)}{\alpha-\beta} \tag{12 12}$$

पुन समीकरण (12 11) का वर्ग करके योग लेने पर

$$\Sigma p^2 = \frac{\Sigma(u-v)^2}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{\Sigma u^2+\Sigma v^2-2\Sigma uv}{(\alpha-\beta)^2} \tag{12 13}$$

समीकरण (12 12) तथा (12 13) से Σpu तथा Σpu^2 का मान समीकरण (12 9) में रखने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\beta = \beta + \frac{\Sigma pu}{\Sigma p^2}$$

$$= \beta + \frac{\Sigma(u^2-uv)/(\alpha-\beta)}{\Sigma u^2+\Sigma v^2-2\Sigma uv)/(\alpha-\beta)^2}$$

$$= \beta + (\alpha-\beta)\frac{\Sigma u^2-\Sigma uv}{\Sigma u^2+\Sigma v_2-2\Sigma uv} \tag{12 14}$$

अत $(\alpha-\beta)\dfrac{\Sigma u^2-\sum uv}{\Sigma u^2+\Sigma v^2-2\sum uv}$ प्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग आकलन की युगपद् अभिनति है।

हमें ज्ञात है कि β का एक सांख्यिकीय बटन होता है तथा इस बटन के माध्य (Mean) में प्रतिदर्श के आकार में वृद्धि (यद्यपि आकार अनन्त हो) के फलस्वरूप उच्चावचन नहीं होते है। इस गुण की सहायता से हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है

$$E(\beta)\simeq\beta+(\alpha-\beta)\frac{n\sigma_u^2-n\,cov(u,v)}{n\sigma_u^2-n\sigma_u^2-2n\,cov(u,v)} \quad (12\ 15)$$

यहाँ n = प्रतिदर्श आकार

σ_u^2 = u का प्रसरण

σ_v^2 = v का प्रसरण

$cov(u,v)$ = u तथा v पारस्परिक रूप से स्वतन्त्र हों, तब

$cov(u,v) = 0$

अस्तु, समीकरण (12 15) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$E(\beta)\simeq\beta+(\alpha-\beta)\frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2+\sigma_v^2} \quad (12\ 16)$$

अतएव β का प्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग आकलन β अभिनत आकलन है तथा प्रतिदर्श आकार के साथ-साथ अभिनति में कभी नहीं होती। अर्थात् β का प्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग आकलन अभिनत तथा असतत (Inconsistent) आकलन है। चूँकि आकलित समीकरण युगपत समीकरण निदर्श का एक भाग है, अत आकलित समीकरण सही हो सकता है।

इसके अतिरिक्त, प्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि में अभिनति निदर्श के अन्य प्राचलों पर भी निर्भर होती है, उदाहरणार्थ, पूर्ति समीकरण का गुणाक α। प्रमुख उपादान निदर्श में त्रुटि पदों के प्रसरण σu^2 तथा σv_2 है। यदि $\sigma u^2 \to 0$ अथवा यदि त्रुटि पद (u) का प्रसरण न्यूनतम हो तो अभिनति न्यूनतम होगी। अर्थात् यदि माँग फलन में त्रुटि पद नहीं हो, तब माँग वक्र (12 6) में प्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा β का आकलन अनभिनत होता है, क्योंकि जब माँग वक्र में त्रुटि पद नहीं होता है तब यह स्थिर रहता है तथा पूर्ति वक्र में त्रुटि पद V_t के परिवर्तित मानों के फलस्वरूप पूर्तिवक्र स्थिर माग वक्र को विभिन्न बिन्दुओं पर काटता है। अस्तु, प्रेक्षित आँकडें (कीमत तथा मात्रा का युगल) स्थिर माग फलन पर विवर्तित पूर्ति वक्र के कटान बिन्दुओं E_1, E'_2 अथा E'_3 को व्यक्त करता है (रेखाचित्र 12 1)।[1] यदि पूर्ति समीकरण में त्रुटि पद (v_t) का प्रसरण शून्य के बराबर हो अर्थात् $\sigma v^2 = 0$, तब अभिनीत का मान अधिकतम होता है। अस्तु समीकरण (12 16) निम्न रूप में समानीत (Reduced) हो जाता है

---

1 When thedemand equation has non-zero errors ($u_t\neq0$), all observed price-quantity pairs represent movements along a stable supply curve Comparable results may be obtained for the case of estimating a supply curve (12 7) The minimum bias occurs when errors in the supply equation has zero variance, the maximum bias occurs when the demand curve have zero variance

$$E(\beta) = \beta + (\alpha - \beta) = \alpha \qquad (12\ 17)$$

यद्यपि अर्थमितिज्ञ यह अनुभव कर सकता है कि वह माँग वक्र का आकलन कर रहा है, परन्तु वह इस स्थिति में पूर्ति वक्र के गुणाकों का आकलन समाप्त कर लेता है।

संरचनात्मक एवं समानीत स्वरूप समीकरण
(Structural and Reduced Form Equations)

अभिनिर्धारण (Identification) का अध्ययन करने से पूर्व हमें इन धाराणाओं का अध्ययन स्पष्ट रूप से करना चाहिये जिनकी सहायता द्वारा अभिनिर्धारण समस्या की व्याख्या की जाती है। उदाहरणार्थ, निम्नांकित आय निर्धारण निदर्श का अध्ययन कीजिये

$C_t = \alpha + \beta Y_t + U_t$ उपभोग फलन (12 18)

$Y_t = C_t + I_t$ आय सर्वसमिका (12 19)

यहाँ C = उपभोग व्यय

Y = आय

I = निवेश व्यय

U = यादृच्छिक विक्षोभ पद अथवा त्रुटि पद

t = समयावधि

α = स्थिरांक

β = उपभोग की सीमांत प्रवृत्ति

समीकरण (12 18) तथा (12 19) को संरचनात्मक समीकरण (Structural Equation) कहते है।[1] इस दो समीकरण निदर्श में, निवेश *(I)* को बाह्य रूप से निर्धारित अनेक संख्याओं का समुच्चय माना जाता है। उदाहरणार्थ, निवेश *(I)* का मान लोक प्राधिकरणों (Public Authorities) द्वारा निर्धारित किया जा सकता है जो C तथा Y से स्वतन्त्र हो तब हम C तथा Y को आंतर चर (Endogeneous variables) तथा I को बाह्य चर (Exogeneous variable) में वर्गीकृत करते हैं।

निदर्श का समानीत स्वरूप (Reduced form) के अन्तर्गत आंतर चर को बाह्य चर के पदों में व्यक्त किया जाता है। आंतर चर वे चर हैं जिनका मान, संतुलन की दशा में, निदर्श के समीकरणों के हल के रूप में साथ-साथ निर्धारित किया जाता है।

---

1 संरचनात्मक समीकरण : आर्थिक समस्याओं के उचित हल हेतु निर्मित तथा प्रतिपादित निदर्शों के समीकरणों की व्यवस्था को संरचना कहते हैं। चूँकि ये समीकरण अर्थव्यवस्था के विषय में पूर्ण ज्ञान प्रदान करते हैं, अत इन्हें संरचनात्मक समीकरण कहते हैं। यदि निदर्श में प्रयुक्त किसी प्राचल को एक निश्चित मान प्रदान किया जाये तब वह समीकरण संरचना समीकरण कहलाता है। इसके विपरीत यदि प्राचलों को निश्चित मान प्रदान नहीं किया जाय तो समीकरणों को निदर्श समीकरण कहा जाता है।

के समान असगत नहीं है। अर्थात् अप्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्राप्त आकलक अभिनत तथा सगत हैं।[1]

अभिनिर्धारण
(Identification)

सर्वप्रथम माँग विश्लेषण के सदर्भ में प्रो वर्किंग (Prof Working) ने अभिनिर्धारण की समस्या को मान्यता प्रदान की। हावेल्मी (Haavelmo) ने उपभोग के युगपत् समीकरण के न्यूनतम वर्ग आकलन की अभिनति का अध्ययन किया तथा अप्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि को प्रस्तुत किया। कॉले आयोग (Cowles Commission) द्वारा प्रथम शिकागो विश्वविद्यालय में तत्पश्चात् येल विश्वविद्यालय में अभिनिर्धारण एव युगपत् समीकरण के आकलन की समस्याओं पर महत्त्वपूर्ण कार्य किया। कॉले सस्था के तत्वावधान में कूपमैन (Koopmans), ब्रोगफम्ब्रीनर (Bronfenbrenner) शिरनोफ (Chernoff) एव डिविन्सकी (Divinsky) तथा रूबिन (Rubin) आदि अर्थमितिज्ञों का कार्य सराहनीय है। थील (Theil) ने कॉले शोध द्वारा प्रदत्त विभिन्न आकलन विधियों का सामान्यीकरण किया तथा उनको k वर्ग आकलक (K-Class estimators) की सज्ञा प्रदान की। तत्पश्चात् जेलनर (Zellner) एव थील (Theil) ने अन्य आकलन विधि का विकास किया जिसे त्रिचरण न्यूनतम वर्ग (Three-Stage Least Squares) कहते हैं। फ्रिशर (Frisher) ने रेखीय समीकरणों हेतु अभिनिर्धारण की समस्या के अध्ययन का अरेखीय समीकरणों हेतु उपयोग किया। अर्थमिति सम्बन्धी अधिकाश पाठ्य पुस्तकों में (उदाहरणार्थ, टिंटनर, क्लाइन, जोहन्सटन्, गोल्डबर्गर, काने, क्राइस्ट तथा वोनाकोट एव वोनाकोट द्वारा लिखित पुस्तकों में) अभिनिर्धारण तथा युगपत् समीकरण की समस्याओं को पर्याप्त स्थान दिया गया है। समर (Summers) ने मान्टे कार्लो (Monte Carlo) तकनीक (अर्थात् प्रयोगों के अभिकलित्र अनुरूपण) द्वारा इन आकलकों की प्रतिचयन विशेषताओं का अध्ययन किया है।

अभिनिर्धारण के विषय क्षेत्र एव प्रकृति का आभास हमें अर्थमितिज्ञों द्वारा प्रस्तुत अभिनिर्धारण की परिभाषाओं से प्राप्त हो सकता है

जे जॉनसटन के अनुसार– अभिज्ञान सरचना प्राचलों को परिकलन करने की एक समस्या है।[2]

---

1 विशेष अध्ययन अप्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि के अन्तर्गत कीजिए।

(1) *Identification is defined as the problem of computing the parameters of the structure which is presumed to have generated the observation on the* endogeneouus variables from the parameters of the likelihood functions

– J Johnston.

क्लाइन के अनुसार– *यदि प्रत्येक सरचनात्मक समीकरण केवल एकल आतर चर सहित* पूर्वनिर्धारित चरों के फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तथा इन व्युत्पादित समीकरणों में साख्यिकीय दृष्टिकोण से कोई भी समीकरण समान दृष्टि गोचर न होती हो तब सम्बन्धों का पूर्ण समुदाय अभिनिर्धारणीय (Identifiable) है।[1]

समीकरण समुदाय हेतु अनन्य (Unique) मान एव निश्चित वक्र की खोज करना औचित्यपूर्ण है। उदाहरणार्थ, माँग तथा पूर्ति वक्रों द्वारा अनन्य कीमत निर्धारण को आर्थिक *अभिनिर्धारण की समस्या माना जाता है। यदि माँग वक्र तथा पूर्ति वक्र निश्चित नहीं है,* अर्थात इनमें समयानुसार अन्य चरों (जैसे आय तथा अन्य वस्तुओं के मूल्य आदि) में परिवर्तन के फलस्वरूप परिवर्तन नहीं होता है, तब अनन्य कीमत ज्ञात नहीं की जा सकती है। इस स्थिति में यह कहा जाता है कि समीकरण समुदाय *अभिनिर्धारणीय नहीं है।* यहा 'निश्चित' शब्द का तात्पर्य यह है कि हमें वक्र का ढाल ज्ञात है।

क्राइस्ट के अनुसार– किसी ज्ञात निदर्श एव उपलब्ध आँकडों के सापेक्ष सरचना को *अभिनिर्धारणीय माना जाता है, यदि और केवल यदि, एक सरचना इस प्रकार की है,* जो कि निदर्श तथा सरचना के समक स्वीकार्य समुच्चय[2], दोनों रूप में विद्यमान है।[3]

सक्षेप में, अभिनिर्धारणण की समस्या सरचनात्मक प्राचलों को स्पष्ट रूप में प्राप्त करना है।[4]

सरचनात्मक समीकरण के प्राचलों का आकलन करने हेतु अप्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि का उपयोग तब ही किया जा सकता है, जब कि समीकरणों के प्राचलों का अभिनिर्धारण सम्भव है। सरचनात्मक समीकरण के प्राचलों का सही अभिनिर्धारण तब ही सम्भव है, जबकि सरचनात्मक प्राचल स्पष्ट रूप में प्राचलों के समानीत स्वरूप के किसी समुच्चय से व्युत्पादित किये जा सकते हों। यह प्रक्रिया कुछ क्लातिकर हो सकती है। अस्तु सही अभिनिर्धारण (Exact identification) हेतु एक अन्य नियम है, जिसको गणना नियम (Counting rule) कहते है। यह नियम बहुत सरल है। यह नियम केवल तब ही पूर्ण होता है, जबकि समीकरण अभिनिर्धारणीय हो।

---

1 "If each structural equation can be written with a single endogeneous variable expressed as a function of predetermined variables alone and none of these derived equations look the same from a statistical point of view, we can say that the complete system of relationship is identifible,' – L.R. Klien

2 ——यदि सरचनाएँ प्रेक्षित समकों के सगत होती हैं तब उन्हें समक स्वीकार्य सरचनाएँ कहते हैं। वह सरचना जिसके अनुरूप निदर्श समीकरण होता है, वह निदर्श स्वीकार्य कहलाती है।

3 "A structure is identified with respect to a given model and a given type of data, if and only if, there is exactly one structure that belongs to both the data, admissible set of structure and model." – Christ

4 Identification is a problem of getting structural parameters without ambiguity

अभिनिर्धारण की समस्या की बीजगणितीय व्याख्या के अन्तर्गत निम्नांकित तीन स्थितियाँ हो सकती हैं

(1) सही अभिनिर्धारण (Exact Identification)
(2) अति-अभिनिर्धारण (Over Identification)
(3) अव-अभिनिर्धारण (Under Identification)

सही अभिनिर्धारण (Exact Identification)

संरचनात्मक समीकरण का सही अभिनिर्धारण केवल तब ही सम्भव है जबकि समीकरण से अपवर्जित (Excluded) चरों (दोनों आन्तर एवं बाह्य) की संख्या संरचनात्मक समीकरणों की संख्या से एक कम हो।[1]

इस प्रणाली के अन्तर्गत प्रत्येक संरचनात्मक प्राचल का एक और केवल एक मान होता है। मान लो निम्नलिखित समीकरण ज्ञात हैं

$p=b_{11}q+b_{12}Y$ माँग समीकरण (12.22)

$q=b_{21}p+b_{22}W$ पूर्ति समीकरण (12.23)

ये मूल समीकरण हैं, इनको संरचनात्मक समीकरण कहा जाता है। प्राचल b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} संरचनात्मक प्राचल हैं।

दोनों समीकरणों में p तथा q आन्तर चर हैं, Y तथा W बाह्य चर हैं।

संक्षिप्त स्वरूप समीकरण प्राप्त करने हेतु आन्तर चरों को बाह्य चरों के पदों में व्यक्त किया जाता है

समीकरण (12.23) से q का मान समीकरण (12.22) में रखने पर हमें प्राप्त होता है,

$$p=b_{11}(b_{21}p+b_{22}W)+b_{12}Y$$
$$=b_{11}b_{21}p+b_{11}b_{22}W+b_{12}Y$$

अथवा $$(1-b_{11}b_{21})p=b_{11}b_{22}W+b_{12}Y$$

अथवा $$p=\frac{b_{11}b_{22}}{1-b_{11}b}W+\frac{b_{12}}{1-b_{11}b_{21}}Y \qquad (12.24)$$

इसी प्रकार समीकरण (12.22) से q का मान समीकरण (12.23) में रखने पर प्राप्त होता है,

---

1 इस नियम के अनुरूप अन्य नियम यह है कि संरचनात्मक समीकरण का सही अभिनिर्धारण केवल तब ही सम्भव है, जबकि अपवर्जित बाह्य चरों की संख्या अन्तर्विष्ट (Included) आन्तर चरों की संख्या से एक कम हो।

$$q=\frac{b_{22}}{1-b_{11}b}W+\frac{b_{12}b_{21}}{1-b_{11}b_{21}}Y \qquad (12\ 25)$$

समीकरण (12 24) तथा (12 25) संक्षिप्त स्वरूप समीकरण है।

यदि सभी वाह्य चरों पर प्रत्येक आतर चर का समाश्रयण करते है, तब संक्षिप्त समीकरणों के निम्नलिखित आक्लन उपलब्ध होते है

$$p=\alpha W+\beta Y \qquad (12\ 26)$$

$$q=\gamma W+\lambda Y \qquad (12\ 27)$$

यहाँ α, β, γ तथा λ आकलित प्राचल है।

तुलना करने पर,

$$\left.\begin{aligned} \alpha=\frac{b_{11}b_{22}}{1-b_{11}b_{22}}, \quad \beta=\frac{b_{12}}{1-b_{11}b_{21}} \\ \gamma=\frac{b_{22}}{1-b_{11}b_{21}}, \lambda=\frac{b_{12}b_{21}}{1-b_{11}b_{21}} \end{aligned}\right\} \qquad (12\ 28)$$

समीकरण (12 28) द्वारा सरचनात्मक प्राचलों के आकलित मान निम्न प्रकार हैं

$$b_{11}=\frac{\alpha}{\gamma}$$

$$b_{12}=\beta\ 1-\frac{\alpha}{\gamma}\ \frac{\lambda}{\beta}$$

$$b_{21}=\frac{\lambda}{\beta}$$

अथवा $b_{22}\ 1-\frac{\alpha}{\gamma}\ \frac{\lambda}{\beta}$

चूंकि यहा प्रत्येक प्राचल का केवल एक मान प्राप्त होता है, अथवा चूंकि सीमकरणों की सख्या 2 है तथा सरचनात्मक समीकरण में से एक चर को अपवर्जित करने पर संक्षिप्त स्वरूप प्राप्त होता है। अस्तु समीकरण समुदाय (निदर्श) वास्तविक रूप में अभिनिर्धारणीय है।

अति-अभिनिर्धारण (Over Identification)

इस प्रणाली के अन्तर्गत एक सरचनात्मक प्राचल के एक से अधिक मान प्राप्त होते हैं। अस्तु इस प्रणाली को अति-अभिनिर्धारण कहते हैं। निम्नलिखित सरचनात्मक समीकरणों का

अध्ययन कीजिये

$$p=b_{11}q+b_{12}Y \qquad (12\ 29)$$
$$q=b_{21}p+b_{22}W+b_{23}Z \qquad (12\ 30)$$

यहां p तथा q आन्तर चर हैं एवं Y, W तथा Z बाह्य चर हैं। संक्षिप्त अथवा लघुकरणात्मक स्वरूप समीकरण निम्न प्रकार है

$$p=\frac{b_{11}b_{22}}{1-b_{11}b_{21}}W+\frac{b_{11}b_{23}}{1-b_{11}b_{21}}Z+\frac{b_{12}}{1-b_{11}b_{21}}Y \qquad (12\ 31)$$

$$q=\frac{b_{22}}{1-b_{11}b_{21}}W+\frac{b_{23}}{1-b_{11}b_{21}}Z+\frac{b_{11}b_{21}}{1-b_{11}b_{21}}Y \qquad (12\ 32)$$

यदि प्रत्येक आतर चर का समस्त वाह्य चरों पर समाश्रयण लिया जाय, तब लघुकरणात्मक स्वरूप समीकरणों के निम्नांकित आकलन प्राप्त होते हैं

$$p=\alpha W+\varepsilon Z+\beta Y \qquad (12\ 33)$$
$$q=\gamma W+Z+\lambda Y \qquad (12\ 34)$$

यहाँ $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \varepsilon$ तथा आकलित गुणांक हैं।

तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\left.\begin{aligned}\alpha &=\frac{b_{11}b_{2}}{1-b_{11}b_{21}}, \gamma=\frac{b_{22}}{1-b_{11}b_{21}}\\ \varepsilon &=\frac{b_{12}b_{23}}{1-b_{11}b_{21}}, =\frac{b_{23}}{1-b_{11}b_{21}}\\ \beta &=\frac{b_{12}}{1-b_{11}b_{21}}, \lambda=\frac{b_{12}b_{21}}{1-b_{11}b_{21}}\end{aligned}\right\} \qquad (12\ 35)$$

आकलित गुणांकों के पदों में सरचनात्मक प्राचलों के आकलन निम्न प्रकार हैं

$$b_{11}=\frac{\alpha}{\gamma} \quad , \quad b_{12}=\varepsilon$$

$$b_{21}=\frac{\lambda}{\beta} \quad , \quad b_{22}=\frac{\beta\gamma-\alpha\lambda}{\beta}$$

$$b_{23}=\frac{\varepsilon}{\beta} \quad , \quad b_{23}= 1-\frac{\alpha}{\gamma}\ \frac{\lambda}{\beta}$$

अस्तु, b_{12} के तीन विभिन्न आकलन तथा b_{23} के दो विभिन्न आकलन प्राप्त होते हैं। ये विभिन्न आकलन प्राय समान नहीं होते हैं। इनमें से किसी आकलन का चयन करने की

कोई उचित विधि नहीं है। अतएव यह निदर्श अति अभिनिर्धारित (Over-Identified) है।

अव-अभिनिर्धारण (Under Identification)

यदि समस्त प्राचलों का आकलन सम्भव नहीं हो तो तब इस स्थिति में निदर्श अव-अभिनिर्धारित (Under identified) है। अर्थात् संक्षिप्त स्वरूप प्राचलों द्वारा प्रत्येक संरचनात्मक प्राचलों का आकलन असम्भव है। किसी भी प्राचल का आकलन सम्भव नहीं होने की स्थिति को कभी-कभी अन-अभिनिर्धारित (Not identified) भी कहा जा सकता है।

पूर्व वर्णित गणना नियम द्वारा सही-अभिनिर्धारित, अति-अभिर्धारित तथा अव-अभिनिर्धारित प्रणाली हेतु पर्याप्त शर्त प्रदान की जाती है। यह नियम निम्न प्रकार है

समीकरण प्रणाली में चरों की कुल संख्या– प्रत्येक समीकरण मेंचरों की संख्या = समीकरण प्रणाली में आतर चरों की संख्या–

यदि यह नियम लागू होता है, तब निदर्श का अभिनिर्धारण सम्भव है। यदि यह नियम लागू नहीं होता, तब निदर्श अति अभिनिर्धारित है अथवा अव-अभिनिर्धारित हैं।

युगपत समीकरण प्रणाली के प्राचलों के आकलन की विधियाँ
(Methods of Estimation of the Parameters of Simultaneous Equation Systems)

उपरोक्त विवेचन द्वारा अभिनिर्धारण की मूलभूत धारणाओं का स्पष्टीकरण होता है। परन्तु युगपत् समीकरण निदर्श के विशेष विवरण में अनेकों अन्य चर भी निहित होते है। अब हम प्राचीन सरल किंजियन आय निर्धारण निदर्श का अध्ययन करेंगे। इस निदर्श में एक उपभोफलन तथा एक आय सर्वसमिका सम्मिलित हैं।उपभोग को आय का फलन मानागया है

$$C_t=\alpha+\beta Y_t+U_t \qquad (12\ 36)$$

आय, उपभोग तथा अनुपभोग व्यय (Non-consumption expenditure) का योग है

$$Y_t=C_t Z_t \qquad (12\ 37)$$

यहाँ C_t = उपभोग
Y_t = आय
Z_t = अनुपभोग व्यय

---

1 J Johnston Econometric Methods Chapter 9

Z को निदर्श के बाहर निर्धारित किया जाता है। उदाहरणार्थ, Z को C तथा Y से स्वतंत्र रूप में सरकार द्वारा निर्धारित किया जा सकता है। अस्तु C तथा Y आंतर चर एवं Z बाह्य चर है।

यदि हम यह मानलें कि अनुपभोग व्यय, Z आय के स्तर में हुए नवीन परिवर्तनों एवं ब्याज की दर γ) से प्रभावित होता है, तब
इस निदर्श में तृतीय सम्बन्ध

$$Z_t = \gamma(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \delta Y_t + V_t$$

सम्मिलित करने हेतु इसका विस्तार सरलतापूर्वक किया जा सकता है।

यहाँ Y_t को बाह्य चर मान लिया जाता है। अब हमारे निदर्श में तीन अन्तर्जात चरों C, Y तथा Z के पदों में तीन समीकरण हैं। सामान्य रूप में, हम उतने समीकरण परिभाषित कर सकते हैं, जितने अंतर्जात चर विद्यमान हैं।

सरलता हेतु हम Z को बहिर्जात चर मान लेते हैं तथा दो समीकरण (12 36) तथा (12 37) प्रणाली का अध्ययन करते हैं। यहाँ विक्षोभ पद u_t की निम्नांकित विशेषताएँ हैं

$$E(u_t) = \quad 0 \text{ प्रत्येक } t \text{ के लिये} \qquad (12\ 38)$$

$$E(u_t\ u_{t+s}) = \begin{cases} 0 & s \neq 0 \text{ तथा प्रत्येक } t \text{ के लिये} \\ \sigma^2 & s = 0 \text{ तथा प्रत्येक } t \text{ के लिये} \end{cases} \qquad (12\ 39)$$

तथा Z एवं u सांख्यिकीय रूप में स्वतन्त्र हैं।

अर्थात् इन मान्यताओं द्वारा विषम विचालिता तथा स्व सहसम्बन्ध को दूर कर दिया गया है। अतः अब हमारे समक्ष उपभोग्फलन (12 36) के प्राचलों के उत्तम आकलन प्राप्त करने की समस्या है। इसके लिए सर्वप्रथम C तथा Y पर सरल न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग करते हैं

सरल न्यूनतम वर्ग विधि (Simple Least Squares Method)

सरल न्यूनतम वर्ग विधि के विधिसंगत प्रयोग हेतु केवल U तथा Y की स्वतन्त्रता का प्रश्न शेष रहता है। समीकरण (12 36) से C का मान समीकरण (12 37) में रखने पर, प्राप्त होता है,

$$Y_t = \sigma + \beta Y_t + Z_t + U_t$$

अथवा $$Y_t = \frac{\sigma}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} Z_t + \frac{U_t}{1-\beta}$$

इसके अतिरिक्त $E(Y_t) = \frac{\sigma}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} Z_t \qquad E(U_t) = 0$

तथा $Cov(U_t\ Y_t)=E[(U_t-E(U_t))(Y_t-E(Y_t))]$

$$=E[U_t(Y_t-E(Y_t)]$$

$$=U_t(\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{Z_t}{1-\beta}+\frac{U_t}{1-\beta}\frac{\alpha}{1-\beta}\frac{Z_t}{1-\beta})$$

$$=E\ U_t\ \frac{U_t}{1-\beta}$$

$$=\frac{1}{1-\beta}E(U_t^2)$$

$$=\frac{\sigma^2}{1-\beta}\neq 0 \qquad \text{यहा } \sigma^2=E(U_t^2)$$

अतएव U_t एव Y_t स्वतन्त्र नहीं है। अस्तु, त्रुटिपद U तथा समाश्रय (Regressor) के मध्य सहसम्बन्ध होता है, जबकि आकलित किया जाने वाला समीकरण सम्पूर्ण युगपत् समीकरण प्रणाली का एक भाग हो। जैसा कि पूर्व अध्यायों में अध्ययन किया जा चुका है, उपभोग फलन (12 36) में सरल न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्रदत्त α तथा β के आकलक अनभिनत नहीं होंगे। इसको युगपत् अभिनति (Simultaneous Bias) कहते है। इसमें प्रतिदर्श का आकार निश्चित होता है। पुन सरल न्यूनतम वर्ग आकलन सगत भी नहीं है, क्योंकि अपरिमित प्रतिदर्श आकार की स्थिति में भी अभिनति विद्यमान रहती है।

इसको स्पष्ट करने हेतु समीकरण (12 36) तथा (12 37) को Y_t तथा C_t के पदों में हल करते हैं

$$Y_t=\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{Z_t}{1-\beta}+\frac{U_t}{1-\beta} \qquad (12\ 40)$$

$$C_t=\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{\beta}{1-\beta}Z_t+\frac{U_t}{1-\beta} \qquad (12\ 41)$$

समीकरण (12 40) तथा (12 41) के द्वारा योग करने पर प्राप्त होता है,

$$Y=\frac{1}{n}\sum Y_t$$

$$=\frac{1}{n}\sum\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{1}{n}\ \frac{1}{1-\beta}\sum Z_t=\frac{1}{n}\ \frac{1}{1-\beta}\sum U_t$$

$$=\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{1}{1-\beta}Z+\frac{1}{1-\beta}U \qquad (12\ 42)$$

इसी प्रकार

$$C=\frac{1}{n}\sum C_t$$

$$=\frac{1}{n}\sum\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{\beta}{1-\beta}\ \frac{1}{n}\sum Z_t+\frac{1}{1-\beta}\ \frac{1}{n}\sum U_t$$

$$=\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{\beta}{1-\beta}Z+\frac{1}{1-\beta}U \qquad (12\ 43)$$

समीकरण (12 42) को (12 40) में से घटाने पर,

$$Y_t-Y=\frac{1}{1-\beta}(Z_t-Z)+\frac{1}{1-\beta}(U_t-U) \qquad (12\ 44)$$

समीकरण (12 43) को समीकरण 12 41 में से घटाने पर,

$$C_t-C=\frac{\beta}{1-\beta}(Z_t-Z)+\frac{1}{1-\beta}(U_t-U) \qquad (12\ 45)$$

प्रतीकों में परिवर्तन करने पर,

$Y_t-Y=y$
$C_t-C=c$
$Z_t-Z=z$
$U_t-U=u$

तब द्वितीय क्रम के घूर्ण (Second order moments) को निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं

$$m_{cy}=\frac{1}{n}\sum cy$$

अथवा $$m_{cy}=\frac{1}{n}\sum(C_t-C)(Y_t-Y)$$

इसी प्रकार $$m_{cc}=\frac{1}{n}\sum(C_t-C)^2$$

तथा इसी प्रकार अन्य द्वितीय क्रम के घूर्ण परिभाषित किये जा सकते हैं। प्रासंगिक मान रखने पर प्राप्त होता है,

$$m_{cy}=\frac{\beta}{(1-\beta)^2}m_{zz}+\frac{\beta+1}{(1-\beta)^2}m_{zu}+\frac{1}{(1-\beta)^2}m_{uu} \qquad (12\ 46)$$

तथा $$m_{yy}=\frac{1}{(1-\beta)^2}m_{zz}+\frac{1}{1-\beta)^2}m_{uu}+2\frac{1}{1-\beta)^2}m_{uz} \qquad (12\ 47)$$

पुन β के न्यूनतम वर्ग आक्लक छ का मान निम्नलिखित है,

$$\beta=\frac{m_{cy}}{m_{yy}}$$

समीकरण (12 46) तथा (12 47) से मान रखने पर,

$$\beta=\frac{\beta m_{zz}+(1+\beta)m_{uz}+m_{uu}}{m_{zz}+m_{uu}+2m_{uz}}$$

मान्यतानुसार यदि $n\rightarrow\infty$, तब $m_{uz}\rightarrow 0$, $m_{uu}\rightarrow\sigma^2$ *and* $m_{zz}\rightarrow$ स्थिरांक m_{zz} इस प्रकार,

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\beta=\frac{\beta m_{zz}+\sigma^2}{m_{zz}+\sigma^2}$$

$$=\frac{\beta m_{zz}+\sigma^2+\beta\sigma^2-\beta\sigma^2}{m_{zz}+\sigma^2}$$

$$=\frac{\beta(m_{zz}+\sigma^2)+\sigma^2(1-\beta)}{m_{zz}+\sigma^2}$$

$$=\beta+\frac{\sigma^2(1-\beta)}{m_{zz}+\sigma^2}$$

अत जब तक $0<\beta<1$, तब तक इस व्यंजक के दायें पक्ष के द्वितीय पद का मान धनात्मक होगा। इसका अर्थ यह है कि β के सरल न्यूनतम वर्ग आक्लक में धनात्मक अभिनति (Biased upward) है इस युगपत् अभिनत का प्रतिदर्श के आकार में वृद्धि करके विलोप नहीं किया जा सकता है।

अप्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि (Indirect Least Squares Methods)

हम अध्ययन कर चुके हैं कि त्रुटिपद तथा समाश्रय (Regressor), Y के मध्य सहसम्बन्ध के फलस्वरूप उपभोग फलन (12 36) के अनभिनत आकलक प्राप्त करने में समस्या उत्पन्न होती है। इस समस्या के समाधान हेतु वैकल्पिक विधि की खोज करना स्वाभाविक है। अप्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा सगत आकलक प्राप्त किये जा सकते हैं। इस विधि का आर्थिक तथा सांख्यिकीय निर्वचन अत्यधिक उपयोगी है। अप्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि की व्यूह रचना (Strategy) यह है कि यदि C का Y पर समाश्रयण ज्ञात करने में U तथा Y के मध्य सहसम्बन्ध पाया जाता है, तब C का समाश्रयण अन्य चर Z पर ज्ञात किया जा सकता है, जहाँ Z, त्रुटि पद U से सहसम्बन्धित नहीं है।

इस विधि का प्रथम चरण यह है कि समीकरणों के मूल सचय को (जिसे 'सरचनात्मक स्वरूप' कहते हैं) लघुकरणात्मक स्वरूप में परिवर्तित किया जाये। अर्थात् समीकरण समुदाय को अन्तर्जात चरों के लिये बहिर्जात चरों तथा त्रुटिपदों के रूप में हल किया जाये।

यह विधि केवल उन सरचनात्मक समीकरणों पर ही लागू होती है जिनका सही अभिनिर्धारण सम्भव है। अप्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि को समझने हेतु कीन्स के आय निर्धारण निदर्श का अध्ययन करेंगे।

$$\left.\begin{aligned} C_t &= \alpha+\beta Y_t+U_t \\ Y_t &= C_t+Z_t \end{aligned}\right\} \text{ सरचनात्मक स्वरूप}$$

इस निदर्श को C तथा Y के लिये हल करने पर,

$$\left.\begin{aligned} C_t &= \frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{\beta}{1-\beta}Z_t+\frac{1}{1-\beta}U_t \quad (12\ 48) \\ Y_t &= \frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{1}{1-\beta}Z_t+\frac{1}{1-\beta}U_t \quad (12\ 49) \end{aligned}\right\} \text{ लघुकरणात्मक स्वरूप}$$

यहा $\frac{\alpha}{1-\beta}, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{1}{1-\beta}$ लघुकरणात्मक स्वरूप गुणाक हैं।

लघुकरणात्मक समीकरण यह स्पष्ट करता है कि बहिर्जात निवेश Z (अनुपभोग व्यय) किस प्रकार उपभोग C तथा आय Y को प्रभावित करता है। उदाहरणार्थ, समीकरण (12 49) द्वारा स्पष्ट है कि निवेश में एक रुपया वृद्धि के फलस्वरूप आय में $[1/(1-\beta)]$ वृद्धि होती है। यह लघुकरणात्मक स्वरूप गुणाक ही प्रसिद्ध निवेश गुणाक माना गया है। यहाँ β उपभोग की सीमात प्रवृत्ति है। इसी प्रकार समीकरण 12 48 में Z का गुणाक भी गुणक है, जोकि यह व्यक्त करता है कि निवेश में एक रुपया वृद्धि होने पर उपभोग में $[\beta/(1-\beta)]$ वृद्धि

होती है। सामान्यत लघुकरणात्मक स्वरूप किसी बहिर्जात चर में परिवर्तन के फलस्वरूप अन्तर्जात चर में हुए सन्तुलन प्रभाव को व्यक्त करता है।

सांख्यिकीयविद् एव अर्थशास्त्री दोनों की ही लघुकरणात्मक स्वरूप में अभिरुचि होती है। साख्यिकीविद् को यह लाभ है कि मूल सरचनात्मक स्वरूप में प्राचलों के आकलन हेतु उसको लघुकरणात्मक स्वरूप का आकलन करना पडता है, यद्यपि मूल सरचनात्मक स्वरूप को अन्य विधियों द्वारा आकलित किया जा सकता है, परन्तु अर्थशास्त्री को नीति सम्बन्धी प्रश्नों का उत्तर देने के लिए लघुकरणात्मक स्वरूप की आवश्यकता होती है।

मानलो हमें समीकरण (12 36) के प्राचल α तथा β का आकलन करने की आवश्यकता होती है। समीकरण (12 48) तथा (12 49) समानीत स्वरूप में है, इनमें से किसी भी एक समीकरण का आकलन करने की आवश्यकता है, चूंकि सरचनात्मक समीकरण के दोनों प्राचल α तथा β किसी भी एक समीकरण द्वारा ज्ञात किये जा सकते है। यहा केवल एक बाह्य चर (Z_t) है।

चूंकि त्रुटिपद U_t का एक स्थिर गुणनखण्ड है, तथा Z से स्वतत्र है। अतएव साधारण न्यूनतम वर्ग आकलक सगत आकलक होंगे। मानलो हम निवेश Z_t पर उपभोग C_t का समाश्रयण समीकरण निम्न प्रकार लिखते है

$$C_t = \hat{a}+\hat{b}Z_t \tag{12 50}$$

यहाँ $\hat{a}$ तथा $\hat{b}$ लघुकारणात्मक स्वरूप (12 48) के आकलित प्राचल है। अर्थात्

$$\hat{a} = \frac{\hat{a}}{1-\beta} \text{ तथा } \hat{b} = \frac{\beta}{1-\beta} \tag{12 51}$$

यहाँ $\hat{a}$ तथा β सरचनात्मक प्राचलों α तथा β के आकलक है।

समीकरण (12 51) को $\hat{\alpha}$ तथा β हेतु $\hat{a}$ तथा $\hat{b}$ के पदों में हल करने पर प्राप्त होता है,

$$\hat{\alpha}=\frac{\hat{a}}{1+\hat{b}},\ \beta=\frac{\hat{b}}{1+\hat{b}} \tag{12 52}$$

समीकरण $$C=a+bz \tag{12 53}$$

द्वारा प्राचलों a तथा b के न्यूनतम वर्ग आकलन श्रेष्ठतम रेखीय अनभिनत आकलन (BLUE) होंगे। अर्थात्,

$$a=\frac{m_{zz}C-m_{cz}Z}{m_{zz}}=\frac{\alpha}{1-\beta} \text{ श्रेष्ठतम अनभिनत आकलक} \tag{12 54}$$

$b \quad \frac{m_c}{m_z} \quad \frac{\beta}{1-\beta}$ का श्रेष्ठतम रेखीय अनभिनत आकलक (12 55)

$a \quad \frac{m_z C - m_c Z}{m_{zz}}$ तथा $b \quad \frac{m_c}{m_{zz}}$ को गास मार्कोव आकलक (Gauss Markov Estimators) कहा जाता है।

समीकरण (12 54) तथा (12 55) को α तथा β के आकलको हेतु हल किया जा सकता है।

$$a - \frac{m_{cz}}{m} - \frac{\beta}{1-\beta}$$

अथवा $\quad m_c \ (1-\beta) = m_{zz}\beta$

अथवा $\quad m_c - m_c\beta + m_{zz}\beta$

$$\beta \ \frac{m_c}{m_{zz}+m_c} \tag{12 56}$$

हर को सरल करने हेतु समसमिका

$$Y = C + Z$$

का अध्ययन कीजिये।

समस्त चरों के साथ Z का सहप्रसरण (Covariance) लेने पर,

$$m_{y} = m_{cz} + m_{zz} \tag{12 57}$$

(12 56) में रखने पर,

$$\beta - \frac{m_c}{m_y} \tag{12 58}$$

इसी प्रकार $\quad \hat{a} - \frac{m_z C - m_c Z}{m_y} \quad (12 59)$

आकलक (12 58) तथा (12 59) यद्यपि अनभिनत आकलकों द्वारा ज्ञात किये गये हैं, परन्तु ये सरचनात्मक प्राचलों α तथा β के अनभिनत आकलक नहीं हो सकते।

उदाहरण– निम्नांकित साधारण राष्ट्रीय आय निदर्श का अध्ययन कीजिये

$$C = \alpha + \beta Y$$
$$Y = C + I$$

यहाँ $\quad C$ = उपभोग व्यय

$\quad X$ = राष्ट्रीय आय

तथा I = निवेश (बहिर्जात)

लघुकरणात्मक स्वरूप इस प्रकार अनुमानित है

$$C=10+2I$$
$$Y=10+3I$$

(अ) α और β के आकलन क्या है ?

(ब) आय में परिवर्तन के साथ उपभोग में कितना परिवर्तन होता है ?

(स) निवेश गुणक कितना है ?

हल– ज्ञात है कि संरचनात्मक समीकरण,

$C=\alpha+\beta Y$ उपभोग फलन (i)

$Y=C+I$ आय सर्वसमिका (ii)

समीकरण (i) में समीकरण (ii) से Y का मान रखने पर,

$$C=\alpha+\beta(C+I)$$

अथवा $C-\beta C=\alpha+\beta I$

अथवा $C=\dfrac{\alpha}{1-\beta}+\dfrac{\beta I}{1-\beta}$ (iii)

समीकरण (iii) से C का मान समीकरण (ii) में रखने पर,

$$Y=\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{\beta I}{1-\beta}+I$$

अथवा $Y=\dfrac{\alpha}{1-\beta}+\dfrac{I}{1-\beta}$ (iv)

समीकरण (iii) तथा (iv) ही समीकरण (i) तथा (ii) के लघुकरणात्मक स्वरूप है

लघुकरणात्मक स्वरूप इस प्रकार अनुमानित हैं,

$C=10+2I$ (v)

$Y=10+3I$ (vi)

(अ) अस्तु α तथा β के आकलन हेतु समीकरण (iii) तथा (v) की सहायता से,

$$\hat{a}=10=\frac{\hat{a}}{1-\beta} \text{ तथा } \hat{b}=2=\frac{\beta}{1-\beta}$$

अथवा $\hat{a}=10(1-\beta$ तथा $\beta=2(1-\beta$

अथवा $\hat{a}=10(1-2/3)$ तथा $\beta=2/3$

अथवा $\hat{a}=10/3$ तथा $\beta=2/3$

(ब) समीकरण (i) में α तथा β के आकलित मान रखने पर हमें प्राप्त होता है,

$$C=\frac{19}{3}+\frac{2}{3}Y$$

इस समाश्रयण रेखा से स्पष्ट है कि आय (Y) के प्रति इकाई वृद्धि के फलस्वरूप उपभोग मे $2/3$ इकाई (अथवा 66 प्रतिशत लगभग) वृद्धि होती है।

(स) समीकरण (iv) से स्पष्ट है कि निवेश में एक इकाई वृद्धि के फलस्वरूप आय मे $1/(1-\beta)$ की वृद्धि होती है। लघुकरणात्मक स्वरूप गुणाक $[1/(1-\beta)]$ परिचित निवेश गुणक माना गया है, यहाँ β उपभोग की सीमात प्रवृत्ति है, अत निवेश गुणक का मान $1/(1-2/3)=3$ है।

इसी प्रकार समीकरण (iii) में निवेश (I) का गुणाक $\beta/(1-\beta)$ निवेश है, जो कि निवेश में एक इकाई वृद्धि के फलस्वरूप उपभोग को प्रभावित करने वाले प्रभाव को व्यक्त करता है। इसका मान 2 के बराबर है।

अस्तु, लघुकरणात्मक स्वरूप समीकरण स्पष्ट रूप से यह व्यक्त करते है कि निवेश उपभोग तथा आय को कैसे प्रभावित करता है।

द्वि-स्तरीय न्यूनतम वर्ग विधि (Two stage Least Squares Method)

युगपत् समीकरण निदर्श के किसी एक समीकरण का आकलन करने पर युगपत् अभिनति की समस्या उत्पन्न होती है। इसका कारण त्रुटिपद तथा स्वतत्र चरों के मध्य सहसम्बन्ध का विद्यमान रहना है। उदाहरणार्थ, उपभोग फलन (12 36) में विक्षोभपद U तथा व्याख्यात्मक चर Y के मध्य सहसम्बन्ध। इस स्थिति में अप्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि का उपयोग प्राय किया जाता है। परन्तु द्वि-स्तरीय न्यूनतम वर्ग विधि सामान्य रूप में प्रयोग की जाती है। इस विधि के अनुसार यदि स्वतन्त्र चर (Y) को किसी प्रकार त्रुटिपद U से असम्बद्ध कर दिया जाये तब साधारण न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा उचित आकलक प्राप्त किये जा सकते है इसके लिये सर्वप्रथम Y का न्यूनतम वर्ग समाश्रयण केवल बहिर्जात चर (Z) पर लिया जाता है, तत्पश्चात् मूल समीकरण में Y को इसके आकलित मान द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है तथा पुन निर्मित समीकरण पर न्यूनतम वर्ग विधि का उपयोग किया जाता है।

गणितीय रूप में, मूल निदर्श निम्न प्रकार है

$$C_t=\alpha+\beta Y_t+U_t$$
$$Y_t=C_t+Z_t$$

प्रथम न्यूनतम वर्ग चरण के अन्तर्गत

$$Y=a_1+a_2Z+e \qquad (12\ 60)$$

का परिकलन किया जाता है

$$\left.\begin{aligned} \text{यहा} \quad a_2 &= \frac{m_{yz}}{m_{zz}} \\ a_2 &= Y - a_2 Z \end{aligned}\right\} \qquad (12\ 61)$$

Y_t का आकलित मान निम्न प्रकार है

$$\hat{Y} = a_1 + a_e^z \qquad (12\ 62)$$

$$Y = \hat{Y} + e \qquad (12\ 63)$$

द्वितीय चरण के अन्तर्गत Y के आकलित मान को मूल समीकरण $C_t + \alpha + \beta Y_t + U_t$ में रखते हैं

$$C = \alpha + \beta(\hat{Y} + e) + U$$

$$\text{अथवा} \quad C = \alpha + \beta\hat{Y} + (\beta e + U) \qquad (12\ 64)$$

इस समीकरण में $\hat{Y}$, Z का सटीक फलन है, जो कि U_t द्वारा सहसम्बन्धित नहीं है। यह इस विधि की मान्यता (गुण) है कि e तथा z के मध्य सहसम्बन्ध नहीं होता है, अतएव $\hat{Y}$ तथा सयुक्त त्रुटिपद $(\beta e + U)$ में भी सहसम्बन्ध नहीं होता है। अन्त में समीकरण (12 64) पर साधारण न्यूनतम वर्ग विधि का उपयोग करके α तथा β के आक्लक प्राप्त किये जाते है। अतएव,

$$\beta = \frac{m_{c\hat{y}}}{m_{\hat{y}\hat{y}}}$$

समीकरण (12 62) द्वारा

$$\hat{Y} = a_1 + a_2 Z$$

$$\text{अथवा} \quad \hat{Y} - \hat{Y} = a_2(Z\bar{Z})$$

$$\hat{y} = a_2 z \quad \left\{ \begin{aligned} \text{यहा } \hat{y} &= \hat{y} - \hat{Y} \\ z &= z - \bar{Z} \\ c &= C - \bar{C} \end{aligned} \right.$$

$$\text{अथवा} \quad c\hat{y} = a_2 cz$$

$$\text{अथवा} \quad \hat{m}_{c\hat{y}} = a_2 m_{cz}$$

$$\text{इसी प्रकार,} \quad \hat{m}_{yy} = a^2 m_{zz}$$

$$\text{अतएव,} \quad \beta = \frac{m_{c\hat{y}}}{m_{y\hat{y}}} = \frac{a_2 m_{cz}}{a^2{}_2 m_{zz}} = \frac{m_{cy}}{a_2 m_{zz}}$$

समीकरण (12 61) से α^2 का मान रखने पर,

$$\beta=\sqrt{\frac{m_{cy}}{\frac{m_{yz}\ m_{zz}}{m_{zz}}}}=\frac{m_{cy}}{a_2 m_{z2}}$$

अथवा $\beta=\frac{m_{cy}}{m_{yz}}$

इस प्रकार द्विस्तरीय न्यूनतम वर्ग तथा अप्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधियों द्वारा समान आकलक प्राप्त होते है। इसी प्रकार α का आकलक ज्ञात किया जा सकता है।

न्यूनतम प्रसरण अनुपात विधि (Least Variance Ratio Method)

उपभोग फलन (12 36) के प्राचलों का आकलन करने की तृतीय विधि न्यूनतम प्रसरण अनुपात विधि है। इस विधि के अन्तर्गत निदर्श का विनिर्देशन यह व्यक्त करता है कि उपभोग (C) आय (Y) के द्वारा प्रत्यक्ष रूप में निर्धारित किया जाता है तथा अनुपयोग व्यय (z) उपभोग सम्बन्ध में सम्मिलित नहीं किया जाता है। यदि हम निम्नलिखित की तुलना करते है,

$$C=\alpha+\beta Y+U \quad (12\ 65a)$$

$$C=\alpha+\beta Y+\gamma Z+V \quad (12\ 65b)$$

तब विनिर्देशन इस बात पर बल देता है कि $\gamma=0$ होना चाहिए। यदि प्रतिदर्श का आकार निश्चित है, तब Y के अतिरिक्त Z को व्याख्यात्मक चर के रूप में सम्मिलित करने के परिणामस्वरूप, सामान्यत z हेतु अशून्य गुणाक प्राप्त होगा तथा (12 65a) के सापेक्ष (12 65b) का अवशिष्ट प्रसरण (Residual variance) कम होगा। न्यूनतम प्रसरण अनुपात यह स्पष्ट करता है कि α तथा β के आकलकों का चयन इस प्रकार करना चाहिये जिससे कि (12 65a) तथा (12 65b) के अवशिष्ट प्रसरणों का अनुपात न्यूनतम हो। मानलो,

$$C^{*}=C-(\alpha^{*}+\beta^{*} Y) \quad (12\ 66)$$

यहाँ α^{*} तथा β^{*} न्यूनतम प्रसरण अनुपात आकलक हैं।
(12 66) को निम्न प्रकार पुन परिभाषित करने पर,

$$\frac{1}{n}\sum C^{*}=\frac{1}{n}\sum C-\frac{1}{n}\sum(\alpha^{*}+\beta^{*} Y)$$

अथवा $\bar{C}^{*}=\bar{C}-(\alpha^{*}+\beta^{*}\bar{Y})$ (12 67)

समीकरण (12 66) में से (12 67) को घटाने पर,

$$C-C=(C-C)-\beta^{*}(Y-Y)$$

अथवा $\quad c^{*}=c-\beta^{*}y \qquad (12\ 68)$

यहा $\quad c^{*}=C^{*}-C,\ \ c=C-C,\ \ y=Y-Y$

समीकरण (12 65a) द्वारा अवशिष्ट वर्गों का योग (Residual sum of squares) निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$C=\alpha+\beta Y+U$$

आकलित $\quad C=\alpha^{*}+\beta^{*}Y+U$

इसके अतिरिक्त $\quad C=\alpha^{*}+\beta^{*}Y+U$

तथा $\quad C-C=\beta^{*}(Y-Y)+(U-U)$

अथवा आकलित $\quad c=\beta^{*}y+e$

अथवा $\quad e=c-\beta^{*}y$

अथवा $\quad \sum e^{2}=\sum(c-\beta^{*}y)^{2}$

$\quad =\sum c^{*2} \qquad (12\ 69)$

यहा $\quad c^{*}=c-\beta^{*}y$

पुन C^{*} का उपयोग करते हुए समीकरण (12 65b) c तथा z के मध्य सम्बन्ध को व्यक्त करता है। चूंकि z बहिर्जात चर है, इस सम्बन्ध हेतु न्यूनतम वर्ग विधि उचित है।

समीकरण (12 65b) द्वारा प्राप्त अवशिष्ट वर्गों का योग निम्न प्रकार है

$$C=\alpha+\beta Y+\gamma Z+V$$

आकलित $\quad C=\alpha^{*}+\beta^{*}Y+\hat{\gamma}Z+V$

तथा $\quad C=\alpha^{*}+\beta^{*}Y+\hat{\gamma}Z+V$

इसके अतिरिक्त, $\quad C-C=\beta^{*}(Y-Y)+\hat{\gamma}(Z-Z)+(V-V)$

∴ आकलित $\quad c=\beta^{*}y+\hat{Y}+e^{*}$

अथवा $\quad e^{*}=(c-\beta^{*}y)+\hat{\gamma}z$

$\quad =c^{*}-\hat{\gamma}z \quad$ यहा $\quad c^{*}=c-\beta^{*}y$

अथवा $\quad \sum e^{*2}=\sum(c^{*}-\hat{\gamma}z)^{2} \qquad (12\ 70)$

यहा $\hat{\gamma}$ न्यूनतम वर्ग आकलक है,

$$\hat{\gamma}=\frac{\sum c^{*}z}{\sum z^{2}}$$

अतएव, $\quad \sum e^{*}=\sum(c^{*}-\gamma z)^{2}$

$$=\sum[c^{*2}-2\hat{\gamma}zc^{*}-(\hat{\gamma}z)^{2}]$$

$$=\sum c^{*2}-2\left(\frac{\sum c^{*}z}{\sum z^{2}}\right)\sum c^{*}z+\sum\left(\frac{\sum c^{*}z}{\sum z^{2}}\right)^{2}z^{2}$$

$$=\sum c^2-2\frac{\sum c'z}{\sum z^2}\sum c'z+\frac{(\sum c'z)^2}{\sum z^2}$$

$$=\sum c'^2-\frac{(\sum c'z)^2}{\sum z^2} \qquad (12\ 71)$$

अत प्रसरण अनुपात, जिसको न्यूनतम किया जाना है,

$$\frac{\sum e^2}{\sum e^2}=\frac{\sum c^2}{\sum c'^2-(\sum c'z)^2/\sum z^2} \qquad (12\ 72)$$

अत यह स्पष्ट है कि अनुपात (12 72) न्यूनतम है, यदि

$$\sum c'z=0 \qquad (12\ 73)$$

समीकरण 12 68 से 12 73 में $c'=c-\beta'y$ रखे पर प्राप्त होता है कि

$$\sum (c-\beta'y)=0 \qquad (12\ 74)$$

अथवा $\sum cz-\beta'\sum yz=0$

अथवा $\beta'=\frac{\sum cz}{\sum yz}=\frac{m_{cz}}{m_{yz}}$

यह मान अप्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग तथा द्विस्तरीय न्यूनतम वर्ग आकलकों के समकक्ष है।

अतएव उपयोग फलन के उपर्युक्त उदाहरण में आकलन के तीनों सिद्धात *ILS*, *TSLS*, तथा *LVR* समान आकलक प्रदान करते हैं। परन्तु यह कथन सामान्य रूप में सत्य नहीं है।

किसी प्राचल का सही अभिनिर्धारण प्राप्त होने के पश्चात् तीनों सिद्धान्त समान आकलक प्रदान करते हैं। इस स्थिति में प्रत्येक की साख्यिकीय विशेषताएँ समान होती हैं।

अति-अभिनिर्धारण की स्थिति में, अप्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि असम्भव है परन्तु द्विस्तरीय न्यूनतम वर्ग तथा न्यूनतम प्रसरण अनुपात विधियों द्वारा निर्धारित आकलक प्राप्त किये जा सकते हैं। इनका समान होना आवश्यक नहीं है। अर्थात् जब किसी प्राचल का अति-अभिनिर्धारण होता है, तब अप्रत्यक्ष न्यूनतम विधि द्वारा प्राचल के अनेक हल सम्भव है। परन्तु द्विस्तरीय न्यूनतन वर्ग विधि द्वारा प्राचल का केवल एक आकलक प्राप्त होता है। फलस्वरूप, यह कहा जाता है कि द्विस्तरीय न्यूनतम वर्ग सामान्य रूप में अधिक उपयोगी है।

अब अभिनिर्धारण की स्थिति के अन्तर्गत इनमें से किसी भी विधि द्वारा आकलक प्राप्त नहीं होते है।

संरचनात्मक तथा लघुकरणात्मक स्वरूप का व्यूह संकेतन
(Representation of the Structural and reduced Forms by Matrix Notation)

अर्थमिति निदर्श के सरचनात्मक समीकरणों का व्यूह संकेत में व्यक्त किया जा सकता है। मान लो सरचनात्मक समीकरण निम्नांकित हैं

$$\left.\begin{array}{l} Y_1+\beta_{12}Y_2+ \quad +\beta_1 G Y G=\gamma_{11}X_1+\gamma_{12}X_2+ \quad +\gamma_p X_p+e_1 \\ \beta_{21}Y_1+Y_2+ \quad +\beta_2 G Y G=\gamma_{21}X_1+\gamma_{22}X_2+ \quad +\gamma_{2p}X_p+e_2 \\ \\ \beta G_1 Y_1+\beta G_2 Y_2+ \quad +YG=\gamma G_1 X_1+\gamma G_2 X_2+ \quad +\gamma G_p X_p+eG \end{array}\right\} \quad (12\ 75)$$

उपरोक्त समुदाय को व्यूह संकेत में निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$BY=TX+e \quad (12\ 76)$$

यहाँ B, β गुणाको का $G\times G$ व्यूह है,

T, γ गुणाको का $G\times P$ व्यूह है,

Y, अन्तर्जात चरों $Y_1, Y_2, \ ,Y_G$ का स्तम्भ सादिश है,

X, बहिर्जात चरों $X_1, X_2, \ ,, X_p$ का P विमा का स्तम्भ सदिश है।

तथा e, त्रुटि पदों $e_1, e_2, \ e_G$ का G- विमा का स्तम्भ सदिश है।

अर्थात्

$$B=\begin{array}{lll} 1 & \beta_{12} & \beta_1 G \\ \beta_{21} & 1 & \beta_2 G \\ \\ \beta G_1 & \beta G_2 & 1 \end{array} \quad G\times G$$

$$T=\begin{array}{lll} -\gamma_{21} & 1 & \beta_2 G \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{2p} \\ \\ \gamma G_1 & \gamma G_2 & \gamma G_p \end{array} \quad G\times P$$

$$Y=\begin{array}{l} Y_1 \\ Y_2 \\ \\ Y_G \end{array} \quad G\times 1 \qquad X=\begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \\ \\ X_p \end{array} \quad p\times 1 \qquad e-\begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ \\ eG \end{array} \quad G\times 1$$

लघुकरणात्मक स्वरूप प्राप्त करने हेतु समीकरण (12 76) को दोनों ओर B^{-1} से पूर्वगुणन (Pre mutiplication) किया जाता है

$$B^{-1}BY=B^{-1}TX+B^{-1}e$$

अथवा $Y=B^{-1}TX+B^{-1}e$ (12 77)

$$B^{-1}BY=Y \quad (12\ 78)$$

लघुकरणात्मक स्वरूप को निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\pi=B^{-1}T \quad (12\ 79)$$

यहाँ π लघुकरणात्मक स्वरूप गुणांकों का $G\times P$ व्यूह है

[B^{-1}, $G\times G$ क्रम का व्यूह है,
T, $G\times P$ क्रम का व्यूह है,
B^{-1}, $TG\times P$ क्रम का व्यूह है।]

उदाहरणार्थ– निम्नलिखित संरचनात्मक समीकरणों को व्यूह संकेतन में व्यक्त कीजिये

$$\left.\begin{array}{l} Y_1=-\beta_{12}Y_2+\gamma_{11}X_1+e_1 \\ Y_2=-\beta_{21}Y_1-\beta_{23}Y_3+\gamma_{21}X_1+\gamma_{22}X_2+e \\ Y_3=\beta_{32}Y_2-\gamma_{31}X_1+\gamma_{32}X_2+e_3 \end{array}\right\} \quad (12\ 80)$$

(12 81) को पुन लिखने पर, प्राप्त होता है,

$$\left.\begin{array}{l} Y_1+\beta_{12}Y_2+0Y_3=\gamma_{11}X_1+0X_2+e_1 \\ \beta_{21}Y_1+Y_2+\beta_{23}Y_3=\gamma_{21}X_1+\gamma_{22}X_2+e_2 \\ 0Y_1+\beta_{32}Y_2+Y_3=\gamma_{31}X_2+e_3 \end{array}\right\} \quad (12\ 81)$$

व्यूह संकेतन में,

$$BY=TX+e \quad (12\ 82)$$

यहां $B=\begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & 1 & \beta_{23} \\ 0 & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$$T=\begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$Y=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}_{3\times 1} \quad X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_{2\times 1} \quad e=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

समीकरण (12 83) का लघुकरणात्मक स्वरूप निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है.

$$BY=TX+e$$

अथवा $B^{-1}BY=B^{-1}TX+B^{-}e$ B^{-1} से 'पूर्वगुणा' करने पर

अथवा $Y=B^{-1}TX+B^{-1}e$ (12 83)

अब समुदाय व्यूह (System matnx) निम्न प्रकार है

$$(B,T)=\begin{matrix} 1 & \beta_{12} & 0 & \gamma_{11} & 0 \\ \beta_{21} & 1 & \beta_{23} & \gamma_{23} & \gamma_{22} \\ 0 & \beta_{32} & 1 & \gamma_{31} & \gamma_{32} \end{matrix} \quad 3\times5$$

यह ज्ञात करने के लिये कि समीकरण समुदाय (12 80) में प्रथम समीकरण का सटीक अभिनिर्धारण किया गया है अथवा अति-अभिनिर्धारण किया गया है, हम व्यूह का अनुस्थित मापदण्ड (Rank cnterion of a matrix) का उपयोग करते है।[1]

व्यूह (B,T) की प्रथम पंक्ति तथा प्रथम, द्वितीय व चतुर्थ स्तम्भों का विलोप करने पर, उपव्यूह निम्नलिखित है,

$$\begin{bmatrix} B_{23} & \gamma_{22} \\ 1 & \gamma_{32} \end{bmatrix} 2\times2$$

---

1. The Rank Criterion

Here we combine the matnces B and T to obtain a obtain a **system matrix** [B, T] where

$$[B, T]=\begin{matrix} 1 & \beta_{12} & & \beta_1G & \gamma_{11} & \gamma_{12} & . & \gamma_{1p} \\ \beta_{21} & 1 & & \beta_2G & \gamma_{21} & \gamma_{22} & & \gamma_{2p} \\ \beta G_1 & \beta G_2 & & 1 & \gamma G_1 & \gamma G_2 & . & \gamma G_p \end{matrix} \quad (12\ 80)$$

Now in order to determine whether the i^{th} equation isidentified, we must know the rank of a particular submatrix of [B,T] which is obtained by striking out (eliminating) the I^{th} row [B,T] and all columns of [B,T] corresponding to variables that are included in the i^{th} equation.

Let us denote the rank of this submatrix by p_i Then the i^{th} structural equation is exactly identified or overidentified if and only if $p_i=G-1$, where G is the number of structural equations (This is an important criterion to be remembered)

According to the rank criterion, if we want to determine the identifiability of the first equation of (12 80), then we need to eliminate the first row of the system matrix [B,T] and all columns which include the variables (both endogenous and exogenous) of first equation. Here the first equation includes three variables Y_1, Y_2 and X_1 that correspond to column first, second and fourth of the system matrix [B,T] Therefore, we also need to eliminate these columns along with the first row of [B,T] in order to get the relevant submatrix,

इस व्यूह का अनुपस्थित (Rank) 2 के बराबर है। सटीक अभिनिर्धारण तथा अति-अभिनिर्धारण का नियम इस प्रकार है

$P = G-1$, यहाँ P= उपव्यूह का अनुस्थित
$=3-1$ तथा G= सरचनात्मक समीकरणों की सख्या
$=2$

गणनात्मक नियम के अनुसार यह समीकरण अति-अभिनिर्धारण है।

सम्पूर्ण निदर्श के आकलन की विधियाँ
(Estimation Methods for Complete Model)

मम्पूर्ण निदर्श के आकलन की अनेक विधियाँ प्रचलित है। आकलन विधि जोकि एकल समीकरण तथा सम्पूर्ण निदर्श के लिये उपयुक्त है का विभेदीकरण आवश्यक है।[1] प्रत्येक समीकरण का पृथक्-पृथक् आकलन करके भी सम्पूर्ण निदर्श का आकलन किया जा सकता है। परन्तु सम्पूर्ण निदर्श का आकलन करने हेतु हम सीमित सूचना एकल समीकरण आकलन तथा पूर्ण सूचना अधिकतम सम्भाव्य आकलन विधियों का प्रयोग कर सकते है। त्रिस्तरीय न्यूनतम वर्ग आकलन विधि का उपयोग भी सम्पूर्ण निदर्श हेतु किया जाता है।

---

1 Full Information Maximum Likelihood (FILM) and Three Stage Least Squares methods are those methods that deal with complete model. These methods have not been discussed here and the readers are, therefore, advised to see J.Johnston, Econometric Methods

13

आर्थिक काल-श्रेणी का विश्लेषण
(The Analysis of Economic Time-Series)

काल-श्रेणी की परिभाषा
(Definition of Time Series)

अर्थमिति की विषय सामग्री के अन्तर्गत उन आर्थिक सम्बन्धों का साख्यिकीय आकलन किया जाता है, जिनका गणितीय सविन्यास सम्भव है आर्थिक समकों को निम्नाँकित 2 मुख्य समूहों में विभाजित किया जा सकता है

(i) काल श्रेणी समक (Time Series Data)

(ii) अनुप्रस्थ समक (Cross Section Data)

अधिकाश विज्ञानों में उन घटनाओं का अध्ययन किया जाता है जो कि समय के सापेक्ष परिवर्तित होती हैं। विभिन्न विज्ञानों के अन्तर्गत वैज्ञानिकों ने काल-श्रेणियों का विश्लेषण किया तथा अर्थशास्त्रियों ने उनके अनुभवों से महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष प्राप्त किये। समय के सापेक्ष सकलित अथवा प्रेक्षित आँकड़ों की श्रेणी को काल श्रेणी कहते हैं। ये समक दैनिक, पाक्षिक, मासिक अथवा वार्षिक काल के सापेक्ष प्रदर्शित किये जा सकते हैं। काल-श्रेणी के अन्तर्गत समय को स्वतन्त्र चर तथा सगत आर्थिक समकों को आश्रित चर की सज्ञा प्रदान की है। उदाहरणार्थ, प्रतिवर्ष गेहूँ का मूल्य, यहाँ वर्ष स्वतन्त्र चर तथा वार्षिक मूल्यों का प्रतीक चर (व्यक्त) आश्रित चर हुआ। प्राय स्वतन्त्र चर का संकेत 't' से तथा आश्रित चर को 'Y_t' से करते हैं। अत समय के क्रमागत बिन्दुओं के अनुसार किसी चर के क्रमवनद्ध मूल्यों को काल-श्रेणी कहते हैं। वास्तविक रूप में अर्थव्यवस्था गतिशील होती है, स्थिर नहीं। समय में परिवर्तन के अनुसार किसी चर के मूल्य में परिवर्तन किस प्रकार होता है, इसका उपयोगी निष्कर्ष निकालने हेतु अर्थशास्त्री तथा साख्यिकीविद् दोनों ही खोज करने के लिए प्रयत्नशील रहते हैं। आर्थिक एव व्यावसायिक क्षेत्र में काल-श्रेणी का विशेष महत्त्व है, क्योंकि अधिकाश आर्थिक समक - उत्पादन, उपभोग, मूल्य, लाभ, बचत, विनियोग, बैंक समाशोधन, जनसख्या तथा बेरोजगारी आदि - समय के सन्दर्भ में ही उपलब्ध होते हैं।

उपभोग फलन का आकलन करने हेतु अर्थमितिज्ञ कभी-कभी व्यक्तियों के उपभोग को एक ही समय बिन्दु पर विभिन्न आय स्तरों के सापेक्ष व्यक्त करते हैं (अनुप्रस्थ समक)। परन्तु कभी-कभी यह परीक्षण किया जाता है कि विभिन्न समय बिन्दुओं के सन्दर्भ में कुल उपयोग किस प्रकार राष्ट्रीय आय से सम्बन्धित है (काल श्रेणी समक)। इसके अतिरिक्त दोनों प्रकार के समकों का मिश्रित अध्ययन भी किया जाता है।

काल-श्रेणी के विश्लेषण का अर्थ (Meaning of the Analysis of Time Series)

काल-श्रेणी के घटक (Components of a Time Series)

काल-श्रेणियों के अध्ययन द्वारा यह आभास होता है कि काल-श्रेणी में निश्चित विशेषताएँ विद्यमान होती हैं। समय में परिवर्तन के साथ-साथ चर के मूल्यों में भी परिवर्तन होते हैं । ये परिवर्तन अनेक तत्त्वों द्वारा प्रभावित होते हैं। अत चर के मूल्यों को प्रभावित करने वाले विभिन्न तत्त्वों के प्रभावों का पृथक्-पृथक् अध्ययन करना आवश्यक है। अर्थात् उन नियमितताओं की खोज तथा माप करना अति महत्त्वपूर्ण है जो कि आर्थिक समकों की गतियों की विशेषताओं को स्पष्ट करती है। काल-श्रेणियों की विशिष्ट गतियों को विभिन्न वर्गों में विभाजित किया जा सकता है। ये वर्ग प्राय काल-श्रेणी के संघटक (Components) होते है। काल-श्रेणी के अन्तर्गत वर्गीकरण का आधारभूत सिद्धान्त तरंग की लम्बाई (Length of the waves) का अभिग्रहण करना है। उदाहरणार्थ, आर्थिक समकों की गति नियमित तथा दीर्घकालीन होने की अवस्था में उसे दीर्घकालीन प्रवृत्ति कहते हैं। प्रो ए ई वाघ (Prof A.E Wagh)के अनुसार, "दीर्घकालीन प्रवृत्ति वह अपरिवर्तनीय प्रवृत्ति है, जो कि सामान्य रूप से एक ही दिशा में पर्याप्त अवधि तक विद्यमान रहती है " इसके विपरीत यदि काल-श्रेणी में अधिक से अधिक एक वर्ष की अवधि के अन्तर्गत नियमित अथवा सावधिक परिवर्तन होते हैं तब उन्हें ऋतुनिष्ठ परिवर्तन कहते हैं। इस प्रकार की सावधिक गतिविधियाँ प्रति घण्टे, प्रति दिन, प्रति सप्ताह, प्रति माह, अथवा प्रतिवर्ष दृष्टिगोचर होती हैं। ऋतु निष्ठ परिवर्तन नियमित, चिरस्थायी और पुनरावर्तक होते है। वार्षिक समकों में ऋतुनिष्ठ अथवा आन्तर्व परिवर्तन दृष्टिगोचर नहीं होते हैं। अधिकांश आर्थिक काल-श्रेणियों में तरंगों के समान (Wave like) चरम उच्चावचन दृष्टिगोचर होते हैं। इस प्रकार के परिवर्तन व्यावसायिक चक्रों के फलस्वरूप उत्पन्न होते हैं। अत इन्हें चक्रीय परिवर्तन कहा जाता है। चक्रीय परिवर्तनों की अवधि प्राय 7 वर्ष से 11 वर्ष तक मानी जाती है। किसी भी व्यापारिक चक्र के चार चरण— सम्पन्नता, मन्दी, अवसाद तथा पुनरुत्थान होते हैं। चक्रीय परिवर्तनों की अवधि सामान्यत नियमित नहीं होती है, तथापि इनका परिवर्तन क्रम लगभग नियमित होता है। उपर्युक्त परिवर्तनों के अतिरिक्त काल-श्रेणियों में ऐसे अनियमित उच्चावचन भी दृष्टिगोचर होते हैं, जिनका कोई ऐसा प्रतिरूप (Pattern) नहीं होता जिससे उनकी पुनरावृत्ति की सम्भावना को ज्ञात किया जा सके। अर्थात् यह कहना अत्यन्त कठिन है कि कितने समय पश्चात् इस प्रकार के उच्चावचन दृष्टिगोचर होंगे। इस प्रकार के उच्चावचनों को यादृच्छिक, अनिश्चित अथवा आकस्मिक उच्चावचन की संज्ञा भी प्रदान की जाती है।

ये उच्चावचन अनेक तत्ववों जैसे बाढ, भूचाल, युद्ध, हडताल, आग , अकाल, ताला-बन्दी, राजनैतिक परिवर्तन आदि के प्रभाव के फलस्वरूप उत्पन्न होते हैं।

काल-श्रेणी में निश्चित समयावधि में हुए परिवर्तनों को उपर्युक्त चारों सघटकों का सम्मिलित प्रभाव माना जाता है। एक काल-श्रेणी में विद्यमान परिवर्तनों की खोज करना, मापन करना तथा उनको पृथक् करना ही काल-श्रेणी का विश्लेषण करना है। तैथिक क्रम में व्यवस्थित समकों द्वारा अधिकतम सम्भव सूचना प्राप्त करना ही काल-श्रेणी का विश्लेषण है।

काल-श्रेणी विश्लेषण के प्रमुख उद्देश्य (Objectuves of Time Series Analysis)

काल-श्रेणी विश्लेषण के प्रमुख उद्देश्य निम्नलिखित हैं।

(i) उच्चावचनों का निर्वचन तथा उनका पारस्परिक सम्बन्ध एव कारण।
(ii) समकों के भूतकालीन व्यवहार का अध्ययन।
(iii) भविष्य के विषय में पूर्वानुमान।
(iv) अन्य काल-श्रेणियों के साथ तुलना।
(v) वर्तमान उपलब्धियों का मूल्याकन तथा उनकी पूर्वानुमति दशाओं से तुलना।

काल-श्रेणी विश्लेषण केवल अर्थशास्त्रियों अथवा व्यावसायियों के लिए ही नहीं अपितु वैज्ञानिक, समाजशास्त्री, आदि के लिए भी महत्त्वपूर्ण है। यह स्पष्ट है कि काल-श्रेणियाँ विभिन्न आर्थिक, प्रौद्योगिक आदि कारकों के सुव्यवस्थित अध्ययन हेतु आधार प्रस्तुत करती हैं, जो कि सगठन हेतु अत्यधिक महत्त्वपूर्ण हैं। यह भी उल्लेखनीय है कि काल-श्रेणी के चारों सघटकों को पृथक्-पृथक् करने तथा उनके मापन हेतु यह आवश्यक है कि समकों को तुलना के योग्य बनाने हेतु उचित समायोजन किया जाए।

काल-श्रेणी के सघटकों के पृथक्कीकरण एव मापाकन हेतु निम्नांकित दो प्रकार के निदर्शों की रचना की जाती है

(i) योगशील निदर्श (Additive Model)– इस निदर्श के अन्तर्गत यह मान्यता है कि काल-श्रेणी के मूल समक चारों सघटकों का योग है। अर्थात्

$$U_t = T + S + C + R \qquad (13.1)$$

यहाँ U_t – मूल समक
T = दीर्घकालीन प्रवृत्ति
S = ऋतुनिष्ठ उच्चावचन
C = चक्रीय उच्चावचन
R = अनियमित (अथवा यादृच्छिक) उच्चावचन

(ii) गुणनशील निदर्श (Multiplicative Model) इस निदर्श के अन्तर्गत यह मान्यता है कि काल-श्रेणी के मूल समक सघटकों का गुणनफल है। अर्थात्

$$U_t = T \times S \times C \times R \qquad (13.2)$$

ये निदर्श मूल समकों पर सपटकों के प्रभाव को व्यक्त करते हैं तथा ये निदर्श पूर्वानुमान में भी सहायक हैं।

सक्षेप में काल-श्रणी में तीन प्रकार के उच्चावचन विद्यमान होते हैं दीर्घकालीन[1], अल्पकालीन[2] एव अनियमित (यादृच्छिक)[3] A अल्पकालीन उच्चावचनों को पुन दो भागों में विज्ञाजित किया जा सकता है ऋतुनिष्ठ उच्चावचन[4] एव चक्रीय उच्चावचन [5] ।

दीर्घकालीन प्रवृत्ति
(Secular Trend)

दीर्घकालीन प्रवृत्ति (Secular or Long Term Trend) अथवा प्रवृति (Trend) अथवा उपनति से हमारा तात्पर्य काल-श्रेणी के सामान्य दीर्घकालीन व्यवहार से है।[6]

प्रो वर्नर जेड हिर्श (Prof Werner Z Hirsh) के अनुसार– "प्रवृत्ति से *तात्पर्य एक काल-श्रेणी में दीर्घकाल में शनै शनै होने वाली वृद्धि अथवा कमी से है जो* कि जनसख्या वृद्धि, तक्नीकी ज्ञान एव उत्पादकता में सुधार, पूँजी उपकरणों की पूर्ति में वृद्धि तथा उपभोग की आदतों में परिवर्तन आदि आधारभूत शक्तियों को व्यक्त करती है।"

कुछ काल-श्रेणियों की दीर्घकालीन प्रवृत्ति वृद्धि की ओर होती है, इसको ऊर्ध्वमुखी (Upward Trend) कहते हैं। इसके विपरीत कुछ काल-श्रेणियों की दीर्घकालीन प्रवृत्ति ह्रास की ओर होती है, इसको अधोमुखी उपनति (Downward or Declining Trend) कहते हैं। उदाहरणार्थ सन् 1956 से प्रत्येक वर्ष प्रदत्त गेहूँ के मूल्यों में वृद्धि की प्रवृति पाई जाती है। बाजार में अत्यधिक प्रतिस्पर्धा के फलस्वरूप अथवा उत्तम प्रतिस्थानापन्न वस्तुओं के उपलब्ध होने के फलस्वरूप किसी वस्तु विशेष की माँग में दीर्घकाल में अधोमुखी उपनति दृष्टिगोचर होगी। उल्लेखनीय है कि ऊर्ध्वमुखी अथवा अधोमुखी उपनति का यह भी अर्थ नहीं है कि समस्त बिन्दुओं पर (समय) चर मूल्य में वृद्धि अथवा कमी हो। अर्थात् समस्त दीर्घकालीन परिवर्तन समान गति से नहीं होते, अपितु अस्थायी उच्चावचनों विद्यमान रहते हुए भी काल-श्रेणी की प्रवृत्ति स्पष्ट रूप में एक निश्चित दिशा की ओर होती है। आर्थिक काल-श्रेणी में दीर्घकालीन प्रवृत्ति 'विकास का नियम' (Law of Growth) से भी सम्बन्धित है। प्रवृत्ति का आगणन करने हेतु विभिन्न विकास वक्रों का प्रयोग किया जा सकता है।

---

1 Long Period Variations
2 Short Period Variations
3 Irregular or Random Variations
4 Seasonal Variations
5 Cyclical Variations
6 A component by which we come to know about the general behaviour of the time series is called the Trend.

विभिन्न व्यक्तियों द्वारा भिन्न-भिन्न वक्र खींचे जाने के फलस्वरूप विभिन्न निष्कर्ष प्राप्त होने का भय विद्यमान रहता है, परन्तु अनुभवी व्यक्ति इस विधि द्वारा काल-श्रेणी की दीर्घकालीन प्रवृत्ति का अधिक उत्तम प्रदर्शन कर सकता है।

(2) चयनित बिन्दुओं की विधि (Selected Points Method)

इस विधि के अनुसार सर्वप्रथम काल-श्रेणी का रेखाचित्र खींचा जाता है, तत्पश्चात् सामान्य प्रकार के दो बिन्दुओं को निर्धारित किया जाता है। उन दोनों बिन्दुओं को मिलाकर एक सरल रेखा खींची जाती है जिसको प्रवृत्ति रेखा (Trend Line) कहते हैं। यह रेखा ही काल-श्रेणी में निहित रेखीय प्रवृत्ति (Linear Trend) को व्यक्त करती है। परन्तु इसमें भी कुछ महत्त्वपूर्ण दोष है। विभिन्न व्यक्तियों द्वारा भिन्न-भिन्न बिन्दुओं का चयन किया जा सकता है। पुन सरल रेखा की श्रेष्ठता व्यक्ति की योग्यता एवं निर्णय पर आधारित है। इस विधि का प्रयोग भी उस अवस्था में ही किया जाना चाहिये, जबकि यह स्पष्ट हो कि एक सरल रेखा द्वारा प्रवृत्ति को उचित रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यहाँ अरेखीय प्रवृत्ति के आसजन हेतु दो से अधिक बिन्दुओं का चयन विवेकानुसार किया जा सकता है।

(3) अर्द्ध-माध्य विधि (Semi-Average Method)

इस विधि के अनुसार सर्वप्रथम काल-श्रेणी के समकों को दो बराबर भागों में विभाजित कर दिया जाता है। यदि वर्षों की संख्या विषम (Odd) है, जैसे 9, 11, 13 आदि तो मध्य वाले वर्ष के मूल्य का परित्याग कर दिया जाता है। कुछ व्यक्तियों के मतानुसार मध्य वर्ष के मूल्य के आधे को दोनों अर्द्ध भागों में जोड दिया जाय, परन्तु यह उचित प्रतीत नहीं होता है। तत्पश्चात् दोनों भागों का पृथक्-पृथक् समानान्तर माध्य प्रत्येक भाग के मध्य बिन्दु के समक्ष लिख दिया जाता है। यहाँ भी प्रत्येक भाग में वर्षों की संख्या सम होने पर समानान्तर माध्य को दो माध्य वर्षों के बीच में लिखा जाता है। इन समानान्तर माध्यों को भी वर्गांकित पत्र पर अंकित कर लिया जाता है। इन दोनों माध्यों के मिलाने पर एक सरल रेखा प्राप्त होगी, जो कि दीर्घकालीन प्रवृत्ति को व्यक्त करेगी। यह विधि सरल है, परन्तु इसका मुख्य दोष यह है कि इसके अन्तर्गत अंकित बिन्दुओं के मध्य सरल रेखीय सम्बन्ध की कल्पना की जाती है। इसके अतिरिक्त यदि प्रत्येक अर्द्ध भाग का मध्यक एक अल्प समयावधि को प्रदर्शित करता है, तब यह भी सम्भव है कि चक्रीय प्रभावों का निराकरण नहीं हुआ हो। अन्त में, यह विधि माध्य के समस्त दोषों द्वारा प्रभावित है।

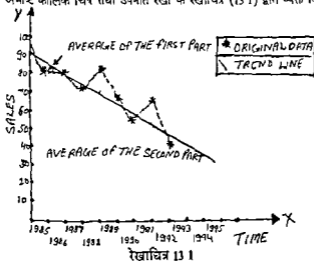
उदाहरण 1 निम्नलिखित सामग्री द्वारा कालिक चित्र बनाइये तथा अर्द्ध-माध्य विधि द्वारा उपनति रेखा (Trend Line) खींचिये।

वर्ष	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
बिक्री	94	81	78	72	80	63	54	59	38

हल ·

वर्ष	विक्री	अर्द्ध योग	अर्द्ध माध्य	
1985	94			
1986	81	325	81 25	→ 1986 तथा 1987 के मध्य म
1987	78			
1988	72			
1989	80			
1990	63			
1991	54	214	53 50	→ 1991 तथा 1992 के मध्य में
1992	59			
1993	38			

अभीष्ट कालिक चित्र तथा उपनति रेखा के रेखाचित्र (13 1) द्वारा व्यक्त किया गया है।

रेखाचित्र 13 1

(4) चल माध्य विधि (Moving Average Method)

चल माध्य विधि दीर्घकालीन प्रवृत्ति के मापन तथा अन्य संघटकों के मापन हेतु दीर्घकालीन प्रवृत्ति के विलोपीकरण (Elimination) हेतु अत्यधिक शक्तिमान गणितीय विधि है। प्रत्येक काल-श्रेणी में प्राय समय-समय पर उच्चावचन होते रहते है, जिनको चक्र

(cycles) कहा जाता है। एक चक्र की अवधि को काल-श्रेणी की आवर्तिता (Periodicity) कहा जाता है।

निम्न बिन्दु (Trough) से प्रारम्भ होकर वर्द्धमान काल-श्रेणी वक्र जब उच्चतम बिन्दु से विचरण करता हुआ पुन अग्रिम निम्न बिन्दु पर पहुँचता है अथवा उच्चतम बिन्दु(Peak) से प्रारम्भ होकर ह्रासमान काल श्रेणी वक्र जब न्यूनतम बिन्दु से विचरण करता हुआ पुन अग्रिम उच्च बिन्दु पर पहुँचता है तब इसे हम पूर्ण चक्र मानते है, तथा इस चक्र में लगा समय चक्र की अवधि कहलाता है।

चल माध्य विशेष अवधि के लिए ज्ञात किये जाते हैं। यह अवधि काल-श्रेणी की प्रकृति अर्थात आवर्तिता पर निर्भर करती है। यदि काल-श्रेणी में आवर्तिता समान नहीं है, तब औसत आवर्तिता ज्ञात की जाती है तथा उत्तम परिमाण प्राप्त करने हेतु चल माध्य की अवधि काल-श्रेणी की औसत आवर्तिता के बराबर ली जाती है। इससे नियमित तथा अनियमित उच्चावचनों का निवारण हो जाता है। जिसके परिमाणस्वरूप सामान्य प्रवृत्ति स्पष्ट होती है।

संक्षेप में, चल माध्य की अवधि ज्ञात करने हेतु सर्वप्रथम मूल समंकों का बिन्दुरेख बनाना चाहिये। तत्पश्चात् दो शिखरों (Crests) के मध्य अन्तर अथवा दो निम्नतम बिन्दुओं (Trough) के मध्य अन्तर द्वारा औसत आवर्तिता का आकलन किया जाता है। यह ही औसत आवर्तिता चल माध्य की अवधि होगी।

चल माध्य विधि को निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

मानलो U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, ... एक प्रदत्त काल-श्रेणी के मान हैं तथा हमें तीन वर्षीय (यदि मान वार्षिक हों) चल माध्य ज्ञात करने हैं। सर्वप्रथम श्रेणी के पहले तीन वर्षों के मान U_1, U_2, U_3 का समानान्तर माध्य ज्ञात किया जायेगा और उसे मध्य वर्ष अर्थात् (द्वितीय वर्ष) के समक्ष लिख दिया जायेगा। पुन: प्रथम वर्ष का परित्याग करके और चतुर्थ वर्ष को सम्मिलित करके तीन मानों (U_2, U_3, U_4) का माध्य ज्ञात किया जायेगा और उसे उनके मध्य वर्ष अर्थात् तृतीय वर्ष के समक्ष लिख दिया जायेगा। इस प्रकार एक वर्ष का परित्याग करते रहते हैं तथा अग्रिम वर्ष को सम्मिलित करते रहते हैं और माध्यों को प्रत्येक बार मध्य वाले वर्ष के समक्ष लिखते रहते हैं। यह गणन क्रिया ही 'चल माध्य विधि' कहलाती है। सारणी 13.1 में तीन वर्षीय चल माध्यों की गणना प्रदर्शित की गई है।

सारणी 13 1 : तीन वर्षीय चल माध्यों की गणना

वर्ष t	मूल्य U_t	तीन वर्षीय चल योग	तीन वर्षीय चल माध्य (T)
1	U_1		
2	U_2	$U_1+U_2+U_3 = v_1$	$v_1/3$
3	U_3	$U_2+U_3+U_4 - v_2$	$v_2/3$
4	U_4	$U_3+U_4+U_5 = v_3$	$v_3/3$
5	U_5	$U_4+U_5+U_6 = v_4$	$v_1/3$
6	U_6		

यदि चल माध्य की अवधि सख्या सम (2,4,6) आदि) हो तब चल माध्य का केन्द्रण (Centerıng a movıng average) किया जाता है। इसके लिये निम्न विधि का उपयोग किया जाता है।

पूर्व वर्णित विधि द्वारा चार (समसख्या) वर्षीय चल माध्यों की गणना करके उन्हें दो वर्षों के मध्य में लिखा जाता है। तत्पश्चात् इन माध्यों के दो वर्षीय चल माध्य ज्ञात किये जाते हैं, जैसा कि सारणी 13 2 में व्यक्त किया गया है। चल माध्यों के दो वर्षीय चल माध्य ज्ञात करना ही चल माध्य का केन्द्रण है।

सारणी 13 2 · चार वर्षीय चल माध्यों की गणना

वर्ष t	मूल्य U_t	चार वर्षीय चल योग	चार वर्षीय चल माध्य (T)	चल माध्य केन्द्रित (T)
1	U_1			
2	U_2	$U_1+U_2+U_3+U_4 = w_1$	$w_1/4 = x_1$	
3	U_3	$U_2+U_3+U_4+U_5 = w_2$	$\imath_2/4 = x_2$	$(x_1 + x_2) / 2$
4	U_4	$U_3+U_4+U_5+U_6 = w_3$	$w_3/4$	$(x_2 + x_3) /2$
5	U_5			
6	U_6			

(5) न्यूनतम वर्ग विधि (Method of Least Squares)

न्यूनतम वर्ग विधि का विस्तृत अध्ययन अध्याय 24 तथा 25 में किया जा चुका है। इस विधि प्रवृत्ति की गणना हेतु सामान्यतया प्रयोग की जाने वाली पर्याप्त सतोषजनक विधि है। यद्यपि इसमें गणितीय समीकरणों का उपयोग होता है। अतएव गणना में कुछ जटिलता आ जाती है। इस विधि द्वारा रेखीय-प्रवृत्ति तथा अरेखीय प्रवृत्ति दोनों का आसजन सुगमतापूर्वक किया जा सकता है। सरल रेखा के सन्दर्भ में, प्रवृत्ति रेखा को सर्वोचित रेखा (Line of best fit) कहा जाता है। इस विधि द्वारा प्राय निम्न प्रकार के वक्रों का प्रयोग किया जाता है

(i) सरल रेखा $u_t = y = a + bt$

(ii) परवलय वक्र (Parabolic Curve)

(a) द्विघात परवलय (Second Degree Parabola)

$y = a + bt + ct^2$

(b) त्रिघात परवलय (Third Degree Parabola)

$y = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$

(iii) विकास वक्र (Growth Curves)

(a) गोम्पर्टज वक्र (Gompertz Curve)

$y = ab^{c^t}$

(b) लॉजिस्टिक वक्र (Logistic Curve)

$\frac{1}{y} = a + bc^t$

अथवा $y = \frac{1}{1 + ac^t}$

उदाहरण (3) : न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा सरल रेखा प्रवृत्ति का अन्वायोजन कीजिए

वर्ष :	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
उत्पादन	80	90	92	83	84	9	92

हल : मान लो सरल-रेखा-प्रवृत्ति का समीकरण $Y = a + bt$ है,

जहाँ Y = उत्पादन

t = समय 0, 1, 2, आदि (सरलता हेतु)

न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्राप्त प्रसामान्य समीकरण निम्नांकित है.

$\Sigma y = \Sigma a + b\Sigma t$ यहाँ y प्रेक्षित मान हैं

$\Sigma ty = a\Sigma t + b\Sigma t^2$

$\Sigma y, \Sigma t, \Sigma ty, \Sigma t^2$ की गणना को अग्रांकित सारणी द्वारा व्यक्त किया जा सकता है.

वर्ष	उत्पादन y	t	ty	t^2	प्रवृत्ति मूल्य $T=\hat{a}+\hat{b}t$
1987	80	0	0	0	84+2× 0 = 84
1988	90	1	90	1	84+2× 1 = 86
1989	92	2	184	4	84+2× 2 = 88
1990	83	3	249	9	84+2× 3 = 90
1991	94	4	376	16	84+2× 4 – 92
1992	99	5	495	25	84+2× 5 – 94
1993	92	6	552	36	84+2× 6 – 96
$n=7$	$\Sigma y=630$	$\Sigma t=21$	$\Sigma ty=1946$	$\Sigma t^2=91$	

प्रसामान्य समीकरणों में मान रखने पर

$$630 = 7a + 21b$$
$$1946 = 21a + 91b$$

हल करने पर प्राप्त होता है

$a = 84$, $b = 2$

अत सरल रेखा का आसजित समीकरण निम्न प्रकार है।

$$Y = 84 + 2t$$

प्रवृत्ति मूल्य उपरोक्त सारणी के अन्तिम स्तम्भ में व्यक्त किये गये हैं।